АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

6296—7037

*

№ 9 **1956**

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

Н. В. Агеев, В. В. Алпатов, Г. Д. Афанасьев, Б. Н. Дикушин, В. Ю. Ломоносов, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), В. В. Покшишевский, Л. И. Седов, В. В. Серпинский, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии . . . 2
Основания математики и математическая логика 3
Теория чисел 6
Алгебра 9
Многочлены и линейная алгебра . . . 9
Группы 12
Поля, кольца и структуры 21
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 28
Теория функций действительного переменного 32
Теория множеств 34
Приближение функций полиномами и их обобщениями 35
Теория функций комплексного переменного 37
Дифференциальные уравнения 51
Обыкновенные дифференциальные уравнения 51
Уравнения в частных производных . . 56
Приложения к физике, технике и естественным наукам 60
Интегральные уравнения 62
Приложения интегральных уравнений . —
Вариационное исчисление 64
Анализ (другие вопросы) 65
Числовые ряды 66
Специальные функции 68
Интегральные преобразования и операционное исчисление 69
Приложения общих методов математического анализа 70
Функциональный анализ 71
Теория вероятностей 78
Математическая статистика 80
Теория игр и математическая экономика 82
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 83
Геометрия 85
Приложения геометрии 87
Проективная и начертательная геометрия 88
Алгебраическая геометрия 89
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 91
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 94
Метрические методы в геометрии . . 98
Геометрия выпуклых многообразий . 101
Численные и графические методы 102
Таблицы . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 114
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 127
Новые книги поступившие в редакцию . . 130
Авторский указатель 131

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийский пос., д. 42 Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, М. М. Постников, С. П. Фиников*

Рефераты 6296—7037 **№ 9** **Сентябрь 1956 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

6296. **Поднять научные исследования на высший уровень** (Піднести наукові дослідження на вищий рівень), Вісник АН УРСР, 1956, № 2, 3—8 (укр.)

6297. **Развитие физико-математических наук в АН УССР за период от XIX до XX съезда КПСС. Лашкарев, Задирака** (Розвиток фізико-математичних наук в АН УРСР за період від XIX до XX з'їзду КПРС. Лашкарьов В. Є., Задирака К. В.), Вісник АН УРСР, 1956, № 2, 39—43 (укр.)

6298. **Десять лет Академии наук Латвийской ССР. Пейве Я. В.**, Latvijas PSR zinātņu akademijas vēstis, Изв. АН ЛатвССР, 1956, № 2, 5—15

6299. **Развитие современной науки. Бернал Джон**, Вестн. АН СССР, 1956, № 3, 56—65

6300. **Научные связи советских и английских ученых. Топчиев А. В.**, Вестн. АН СССР, 1956, № 4, 47—51

6301. **Заседания Ленинградского общегородского математического семинара.** Успехи матем. наук, 1956, 11, № 1, 249—254

Сообщается о докладах, прочитанных на заседаниях семинара:

8 февраля 1955 г. В. И. Крылов, О сходимости интерполирования в классах дифференцируемых функций. Д. С. Горшков, Неквадратичные комплексные иррациональности, которые разлагаются в непрерывные дроби с ограниченными неполными частными.

22 февраля 1955 г. С. М. Лозинский, О радиусе аналитичности решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с аналитической правой частью. А. А. Киселев, Решение краевой задачи для линеаризированных уравнений гидродинамики вязкой жидкости в трехмерном пространстве.

8 марта 1955 г. Н. А. Лебедев, К теории конформных преобразований круга на неналегающие области. Г. П. Сафронова, О некоторых граничных задачах теории аналитических функций в классах Орлича.

22 марта 1955 г. Эрих Келер, Арифметика, алгебраическая геометрия и теория функций.

8 апреля 1955 г. Карл Шрётер, О систематической трактовке математической логики и оснований математики в рамках изучения математики.

12 апреля 1955 г. Е. С. Ляпин, Потенциальная обратимость элементов в полугруппах. Ю. Е. Аленицын, Об однолистных функциях в многосвязных областях.

26 апреля 1955 г. Е. В. Вороновская, О системе дифференциальных уравнений некоторых экстремальных полиномов. О. В. Гусева, Об априорных оценках решений эллиптических уравнений и систем.

6302. **Заметки по вопросу о применении математического метода в биологических науках. Верцинский А.**, Вопр. философии, 1956, № 1, 135—138

6303. **Кристаллы в науке и технике. Шубников А. В.**, Вестн. АН СССР, 1956, № 3, 37—52

6304. **О преподавании математики в педагогических институтах. Виленкин Н. Я., Яглом И. М.**, Матем. в школе, 1956, № 2, 45—47

6305. **Числовые последовательности в школьном курсе математики. Манзон Б. А.**, Изв. Крымск. пед. ин-та, 1955, 21, 233—257

6306. **Заключительный курс геометрии в средней школе. Артемов А. К.**, Уч. зап. Пензенск. гос. пед. ин-та, 1955, № 2, 3—38

6307 К. **Преподавание высшей математики в заочных высших технических учебных заведениях.** Метод. пособие для преподавателей. **Левин В. И., Фукс Б. А., Андриевский Ф. П., Берман Я. Р., Старжинский В. М., Соболев Н. А., Файнберг М. М., Шапиро З. Я., Шестаков А. А., Полозков А. П.**, М., «Сов. наука», 1955, 64 стр., 95 к.

6308 К. **Введение в математику. Йосида и др.** (Байфукан, 1954, 272 стр., 300 иен), 數學序說. 吉田洋一等的, 培風館, 272頁,300圓), 國內出版物目錄 (Кокунай сюппанбуцу мокуроку, Japan. Nat. Bibliogr.), 1954, 6, № 3, 12 (япон.)

6309 К. **Математическая смекалка. Кордемский Б. А.**, Изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1955, 576 стр., илл., 9 р. 30 к.

6310 К. **Справочник по элементарной математике. Шахно К. У.**, Л., Изд-во ЛГУ, 1955, 208 стр. с черт., 4 р. 55 к.

6311 К. **Карманный математический справочник для высшей школы. Киёмия и др.** (數學公式ポケットブック. 高校篇. 清宮俊雄等驅修・三共出版, 145頁, 80圓) (Санкё сюппан, 1954, 145 стр., 80 иен), 國內出版物目錄 (Кокунай сюппанбуцу мокуроку, Japan. Nat. Bibliogr.), 1954, 6, № 2, 15 (япон.)

6312 К. **Сборник математических формул. Хирано и др.** (數學公式集. 平野智治等. 高橋書店. 327頁, 100 圓) (Такахаси сётен, 1954, 327 стр., 100 иен), 國內出內版物目錄 (Кокунай сюппанбуцу мокуроку, Japan. Nat. Bibliogr.), 1954, 6, № 7, 16 (япон.)

6313 Д. **Методы симметрии и однородности в элементарной алгебре. Барыбин К. С.** Автореф. дисс. канд. пед. н. Н.-и. ин-т методов обучения Акад. пед. наук РСФСР, М., 1956

6314 Д. **Теория неравенств как один из узловых раздело школьного курса математики, ее значение для**

развития логического мышления. Хромой Я. В. Автореф. дисс. канд. пед. н. Киевск. гос. пед. ин-т, Киев, 1956

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

6315. **Личный вклад Евклида в создание геометрии. Фрайезе** (Il contributo personale di Euclide alla costruzione dell'edificio geometrico. Frajese Attilio), Archimede, 1954, 6, № 6, 258—262 (итал.)

Указывается, что в связи со скудостью наших сведений о развитии греческой геометрии до 300 г. до н. э. чрезвычайно трудно выделить в «Началах» результаты, полученные самим Евклидом. Тем не менее, автор считает, что Евклид не только систематизировал известный до него материал, но также включил в «Начала» и собственные исследования. В частности, опираясь на критические замечания Аристотеля (Первая аналитика, II, 16, 65a и 17, 66a) по поводу современной ему теории параллельных прямых, автор показывает, что вторая половина 1-й книги «Начал» является личным вкладом Евклида в геометрию.

В. Ф. Рогаченко

6316. **Научное творчество Рене Декарта. Бастьен** (L'oeuvre scientifique de René Descartes. Bastien Hermas), Technique (Montréal), 1955, 30, № 6, 406—413 (франц.)

Первые труды Декарта: классификация геометрических задач по их разрешимости, предвосхищение теоремы Эйлера о многогранниках и др. Под влиянием Клод Мидоржа и Мерсенна Декарт далее пишет «Рассуждение о методе» с приложениями: «Геометрия», «Метеоры», «Диоптрика» (1637). В «Геометрии» координатным методом (термина «координата» у Декарта нет, он введен Лейбницем, Декарт же употребляет термин «основная линия») изучаются кривые разных порядков в косоугольной системе координат; вводятся современные обозначения для постоянных и переменных величин, показателя степени; дается правило определения числа положительных и отрицательных корней уравнения. «Метеоры» дают теорию радуги, «Диоптрика» — закон преломления света. Отмечается интерес Декарта к обучению ремесленников их делу.

И. Я. Депман

6317. **Альбрехт Дюрер как математик и теоретик искусства. Штек** (Albrecht Dürer als Mathematiker und Kunsttheoretiker. Steck Max), Nova acta Leopol., 1954, 16, № 114, 425—434 (нем.)

На основании трех научных работ Дюрера (Underweysung der messung mit dem zirkel und richtscheyt, 1525; Befestigungslehre, 1527; Proportionslehre, 1528) и анализа его картин автор утверждает, что Дюрер осуществлял в своей деятельности лозунг: «искусство без науки ничто». И. Я. Депман

6318. **Джордж Буль как ученик и учитель. Рис** (George Boole as student and teacher. By some of his friends and pupils. Rhees Rush), Proc. Roy. Irish Acad., 1955, A57, № 6, 74—78 (англ.)

6319. **Ломоносов и Ньютон. Кудрявцев П. С.**, Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1955, 5, 33—51

6320. **Древние китайские математики и их достижения. Три больших вклада Лю Хуэя в математику. Сюй Чунь-фан** (中國古代數學家及其成就. 劉徽在數學上的三大貢獻. 許莼舫), 科學大衆 (Кэсюэ дачжун), 1953, № 10, 371—373 (кит.)

Время написания широко известного в Китае и в настоящее время трактата «Математика в девяти разделах» до сих пор точно не установлено. Еще император Хуанди (3000 лет до н. э.) приказал Ли Шоу написать книгу по математике, которая называлась «Девять разделов Хуанди». Говорят, что в эпоху Чжоу (1200 лет до н. э.) чиновник высокого ранга Чжоу написал «Девять математик», которая служила учебником детям высокопоставленных чиновников. Судя по терминологии задач трактата, автор предполагает, что книга создавалась путем исправлений, добавлений в период династий Цинь и ранней Хань и даже ранее (т. е. III—I вв. до н. э. и ранее). Та же редакция, которую мы сейчас имеем, принадлежит, по мнению автора, ко времени поздней Хань (т. е. I—II вв. н. э.). Первые комментарии к «Математике» были составлены Лю Хуэем в 263 г. Они разъясняли непонятные места текста и дополняли его. Приводится пример комментария Лю Хуэя к известной задаче (раздел 9 трактата) о тростнике длины c, растущем в центре квадратного водоема со стороной a и глубиной b. Своим верхним концом тростник может достать до берега. Искомая глубина водоема находится по формуле, словесно данной в решении задачи: $b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}$. Лю Хуэй дает геометрическую интерпретацию этому решению: $a^2 = c^2 - b^2$ есть гномон, если из этого гномона вычесть квадрат $(c - b)^2$, то останется удвоенная площадь прямоугольника со сторонами b и $(c - b)$; отсюда можно найти b. Высказывается предположение, что задача аналогичного содержания в индийской математике была заимствована, быть может, из Китая.

Отмечается, что Лю Хуэй предложил метод вычисления сколь угодно точного значения π с помощью вписанных многоугольников. Этот метод описан им в комментариях к 1-му разделу «Математики», где берется $\pi = 3$. Значение $\pi = 3{,}14$, полученное Лю Хуэем, называли впоследствии «коэффициентом Хуэя» (РЖМат, 1956, 60). В своем «Математическом трактате о морском острове» Лю Хуэй рассмотрел 9 задач на измерение размеров недосягаемых предметов и расстояний до них (например, определение высоты горы, глубины ущелья, ширины реки и т. д.). Этот трактат был также написан в виде дополнения к 9 разделу «Математики», но затем в качестве самостоятельной работы был помещен в математическом сборнике «Шу шу суань цзин» (Десять классических книг по математике), изданном во времена династии Тан (618—907 гг.). Метод решения такого рода задач, предложенный Лю Хуэем, основан на использовании угольника и свойств подобных треугольников и является развитием древнего метода «чжун-ча», о котором написано в еще более древнем трактате «Чжоу би суань цзин» (РЖМат, 1956, 5669). Отмечается раннее сравнительно с другими странами появление таких задач в китайской математике. Приводятся примеры работ Цинь Цзю-шао, Шэнь Ко, Ван Сяо-туна, Ли Чжи, продолживших разработку вопросов «Математики в девяти разделах». Отмечается значение трактата как источника исследований в математике других народов в последующие времена (индусы, арабы, европейцы).

Э. П. Березкина

6321. **Историки и философы. Сартон** (Historians and philosophers of science. Sarton George), Isis, 1955, 46, № 4, 360—366 (англ.)

6322. **Логогриф Эйлера. Специали** (Le logogriphe d'Euler. Speziali P.), Stultifera navis, 1953, 10, № 1/2, 6—9 (франц.)

В письме Леонарда Эйлера к Христиану Гольдбаху от 4 июля 1744 г. последнему было предложено расшифровать зашифрованный Л. Эйлером латинский текст, содержащий 408 букв (Fuss P.-H., Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siecle, СПб., 1843, 1, 293). При этом, по условию, каждому знаку зашифрованного текста отвечала вполне определенная буква (но не наоборот). Как выяснил автор, 8 букв оригинала имели двоякое

обозначение. За решение этой задачи впоследствии (уже в XX в.) была объявлена в Швейцарии премия. Автору удалось расшифровать текст, который оказался взятым из 7-й книги записок Цезаря «О галльской войне». Расшифровка позволила установить неточность воспроизведения отдельных букв зашифрованного текста при опубликовании его П. Фуссом.

Г. К. Михайлов

6323. **Первое доказательство теоремы о неподвижной точке при непрерывном отображении шара в себя, данное латышским математиком П. Г. Болем. Мышкис А. Д., Рабинович И. М.,** Успехи матем. наук, 1955, **10**, вып. 3 (65), 188—192

Доклад на заседании Московского матем. об-ва 12 апреля 1955 г.

В одной из работ П. Г. Боля (J. reine und angew. Math., 1904, **127**: 3/4, 179—276) содержится ряд важных утверждений n-мерной топологии. В частности, одно из предложений Боля эквивалентно известной теореме (которую обычно называют теоремой Брауэра) о существовании неподвижной точки при непрерывном отображении шара в себя. В докладе достаточно подробно изложены рассуждения, примененные Болем при доказательстве топологических утверждений. Указаны задачи анализа, к решению которых Боль применил свои топологические теоремы.

Таким образом, в открытии ряда важных топологических теорем и в применении их к математическому анализу П. Г. Боль опередил своих современников.

А. М. Красносельский

6324. **О так называемых творческих и критических периодах в истории математического анализа. Рыбников К. А.,** Историко-математические исследования, вып. 7, М., Гостехтеоретиздат, 1954, 643—665

В литературе по истории математики нередко высказывается мнение, что в ходе развития этой науки последовательно сменяют друг друга периоды творческие, когда требование строгости отходит на задний план, и периоды критические, когда проблемы обоснования науки разрабатываются в ущерб конкретным достижениям. Примером творческого и, значит, некритического периода в развитии математического анализа считается обычно XVIII в. (например, Ф. Клейном). Автор показывает, что так называемые критические периоды в основном совпадают по времени с периодами наибольшей творческой продуктивности. На основе фактов устанавливается, что XVIII в. — период активного научного творчества— был вместе с тем веком интенсивной научной критики и поисков логического обоснования анализа. В своей характеристике главных направлений в обосновании исчисления бесконечно малых в XVIII в. автор исходит из положений, высказанных К. Марксом в его математических рукописях. Вместе с тем автор подчеркивает, что критикуемая им концепция находится в противоречии с общим положением марксистско-ленинской теории о необходимости научной критики и борьбы мнений для развития науки.

А. П. Юшкевич

6325. **Найдены числовые знаки бронзового века. Феттер** (Nález číselných značek z doby bronzové. Vetter Quido), Mat. ve škole, 1955, 5, № 7, 432—434 (чеш.)

Археологические раскопки 1951 г. в Барке близ Кошица (Чехословакия) обнаружили значительное число костяных обрубков с надрезами, которые представляют числовые обозначения, сделанные человеком около 1400 лет до н. э. Там же были обнаружены разграфленные каменные плиты, которые по всем признакам являются древнейшим абаком.

И. Я. Депман

6326. **Цель и метод истории точных наук. Дейстерхейс** (Ziel und Methode der Geschichte der exakten Wissenschaften. Dijksterhuis E. J.), Math.-phys. Semesterber., 1954, 4, № 1/2, 106—121 (нем.)

Автор излагает свои точки зрения на характер истории точных наук, главным образом на примере математики, а также на смысл преподавания этого предмета. Ряд положений автора сомнителен.

Б. В. Гнеденко

6327. **Из опыта проведения математических вечеров, посвященных истории индийской математики. Чистяков В. Д.,** Матем. в школе, 1956, № 2, 48—56

6328 Д. **Развитие математики в Киевском университете от его основания до 1917 г. Добровольский В. А.,** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т истории естествозн. и техн. АН СССР, М., 1956

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

6329. **Интуиционистская дифференцируемость. Брауэр** (Intuitionistische differentieerbaarheid. Brouwer L. E. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 3, 201—203; Indagationes math., 1954, **16**, № 3, 201—203 (голл.)

Пусть $x = P$ — некоторое значение аргумента действительной функции $F(x)$, взятое из интуиционистского континуума (это понятие в данной статье не разъясняется). Через $i_1, i_2, \ldots$ обозначается последовательность замкнутых ненулевых интервалов, содержащих P и стремящихся к P; через d_ν обозначается $\Delta F/\Delta x$ для i_ν. Функция $F(x)$ называется в точке $x = P$ слабо дифференцируемой, если существует число c такое, что невозможно найти последовательность $i_1, i_2, \ldots$ и натуральное m, для которых $|d_\nu - c| > 2^{-m}$ при всех ν; число c называется слабой производной функции $F(x)$ в точке P. Функция $F(x)$ называется в точке $x = P$ сильно дифференцируемой и имеет сильную производную c, если для каждого n можно найти m такое, что для всех последовательностей $i_1, i_2, \ldots$ из $i_\nu < 2^{-m}$ следует $|d_\nu - c| < 2^{-n}$ при всех ν.

Строится пример функции, которая в данной точке слабо дифференцируема, но не сильно дифференцируема. Исследуется на дифференцируемость некоторая функция из более ранней работы автора.

В. К. Детлов

6330. **Новое доказательство того, что класс примитивно-рекурсивных функций шире класса элементарных функций. Петер** (Ein neuer Beweis für die Tatsache, dass die Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen umfassender als die Klasse der elementaren Funktionen ist. Péter Rozsa), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1955, **1**, № 1, 29—36 (нем.)

Применение канторовой диагонали к пересчету всех элементарных функций: $\varphi_0(a), \varphi_1(a), \ldots, \varphi_m(a), \ldots$ порождает неэлементарную функцию $\psi(a)$. Новым в статье является доказательство примитивной рекурсивности функции $\varphi(m, a) = \varphi_m(a)$, которая задается схе-

мой: $\varphi(0, a) = 1$

$$\varphi(m+1, a) = \alpha\{n, a, \varphi[\exp_0(m+1), a], \varphi[\exp_1(m+1), a], \sum_{j=0}^{\varphi[\exp_1(m+1),a]} \varphi[\exp_0(m+1), \beta(j, m)], \prod_{j=0}^{\varphi[\exp_1(m+1),a]} \varphi[\exp_0(m+1), \beta(j, n)]\},$$

где α, β — примитивно-рекурсивные функции.

Б. А. Трахтенброт

6331. О выполнимости и разрешимости в неклассических функциональных исчислениях. Расёва Г., Сикорский Р., Бюлл. Польск. АН, Отд. 3, 1953, 1, № 6, 225—227

О выполнимости и разрешимости в неклассических функциональных исчислениях. Расёва, Сикорский (On satisfiability and decidability in non-classical functional calculi. Rasiowa Helena, Sikorski Roman), Bull. Acad. polon. sci., 1953, Cl. 3, 1, № 6, 229—231 (англ.)

Сообщение содержит несколько теорем (без доказательства) о функциональных исчислениях, базирующихся на разных исчислениях высказываний как позитивное Гейтинга, Люиса S_4 и классическое.

Рассматривая выражения как функционалы Мостовского со значениями в соответствующих абстрактных алгебрах (структуры с псевдодополнением с нулем или без нуля, алгебры замыканий и алгебры Буля) можно ввести обобщенное понятие выполнимости и посредством него сформулировать и доказать для каждого из исследуемых функциональных исчислений теорему Гёделя о полноте и теорему Лёвенгейма — Сколема (для множеств выражений, для которых имеет место теорема о дедукции). Кроме того, авторы формулируют следующие теоремы: Если экзистенциальное выражение $\underset{x}{\Sigma}\alpha$ (соответственно $\underset{x}{\Sigma}\square\alpha$) доказуемо в позитивном функциональном исчислении, минимальном или Гейтинга (соответственно Люиса), то доказуема также некоторая подстановка $\alpha\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}$ при соответствующей переменной z. Каждое выражение $\Xi\alpha$, где Ξ — последовательность символов $\underset{x}{\Sigma}\underset{y}{\Pi}$ (соответственно $\underset{x}{\Sigma}\square\underset{y}{\Pi}$), а α не содержит кванторов, разрешимо в позитивном функциональном исчислении, минимальном или Гейтинга (соответственно Люиса).

R. Suszko

6332. Об одном свойстве примитивно-рекурсивных функций, принимающих бесконечное множество значений. Марквальд (Zur Eigenschaft primitiv-rekursiver Funktionen, unendlich viele Werte anzunehmen. Markwald W.), Fundam. math., 1955, 42, № 1, 166—167 (нем.).

Пусть $\varphi_k(n)$ — общерекурсивная функция, универсальная для примитивно-рекурсивных функций. Пусть Y — множество натуральных чисел k, для которых функция $f(n) = \varphi_k(n)$ принимает бесконечно много значений, т. е. $\overline{\lim}_n \varphi_k(n) = \infty$. Множество Y, как следует непосредственно из его определения, может быть определено выражением

$$\Pi_x \sum_y R(x, y, k), \tag{1}$$

где R — примитивно-рекурсивное отношение. Автор доказывает, что множество Y не может быть определено никаким выражением вида

$$\sum_x \Pi_y S(x, y, k), \tag{2}$$

где S — рекурсивное отношение. Основным моментом в доказательстве является построение для каждого примитивно-рекурсивного отношения $P(x, y, z)$ примитивно-рекурсивной функции g, для которой имеет место тождество

$$\Pi_x \sum_y P(x, y, z) \leftrightarrow \overline{\lim}_n g(z, n) = \infty. \tag{3}$$

Если бы множество Y могло быть представлено в виде (2), то, в силу эквивалентности (3) и известных свойств рекурсивных функций, каждое множество, определение которого имеет вид (1), могло бы быть определено выражением вида (2), что невозможно.

Доказательство содержит некоторые неясности. Предикат R на стр. 167 определен столь общим образом, что он может и не быть примитивно-рекурсивным. Вместо функции $s_p(t)$ может получиться примитивно-рекурсивная функция $s'(k, z)$ такая, что если $g(z, n) = \varphi_k(\sigma'(z, n))$, где σ' — функция, порождающая пары, то и $\varphi_{s'(k,z)}(n) = g(z, n)$. Только в этом случае ясно, что условие $\overline{\lim}_n g(z, n) = \infty$ эквивалентно условию $s'(k, z) \in Y$.

A. Grzegorczyk

6333. Теорема Генцена для расширенного исчисления предикатов. Маэхара (Gentzen's theorem on an extended predicate calculus. Maehara Shôji), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 10, 923—926 (англ.)

Доказывается теорема об устранимости сечений (правило вывода генценовского исчисления) для расширения классического исчисления Генцена, состоящего в допущении кванторов $\forall^0$ и $\exists^0$ по переменным высказываниям (без аргументов).

Помимо степени (grade) формулы, определяемой как число вхождений логических операторов, вводится ступень (degree), определяемая как число вхождений пропозициональных кванторов $\forall^0$ и $\exists^0$. Ступень доказательства наибольшая из ступеней $\forall^0$-антецедента и $\exists^0$-сукцеденты этого доказательства; при этом «ступень $\forall^0$-антецедента» (т. е. применения правила введения $\forall$ в антецедент) определяется как ступень формулы $\mathfrak{A}$ в применении $\dfrac{F(\mathfrak{A}), \Gamma \to \theta}{\forall^0 \varphi F(\varphi), \Gamma \to \theta}$, и двойственным образом определяется «ступень $\exists^0$-сукцедента».

Основная теорема: Если секвенция доказуема, то для нее имеется доказательство без сечений, имеющее ступень 0.

Доказательство этой теоремы сводится к доказательству следующих двух теорем:

Если секвенция доказуема, то для нее имеется доказательство ступени 0.

Если для секвенции имеется доказательство ступени 0, то для нее имеется доказательство ступени 0 без сечений.

А. С. Есенин-Вольпин

6334. О геометрической интерпретации логических выражений. Расёва, Мостовский (O geometrycznej interpretacji wyrażeń logicznych. Rasiowa Helena, Mostowski Andrzej), Studia log., 1953, 1, 254—269 (польск.; рез. русс., англ.)

Статья содержит геометрическую интерпретацию кванторов в классическом и интуиционистском исчислении предикатов и показывает эквивалентность этой интерпретации известной алгебраической интерпретации (для интуиционистского исчисления интерпретация дана в статье Мостовского, J. Symbolic Logic, 1948, 13, 204—207). Это влечет на основании известных теорем о адэкватности алгебраической интерпретации (Расева и Сикорский, Fundam. math., 1953, 40, 62—95) адэкватность геометрической интерпретации. Существенное соотношение, которое позволяет перевести алгебраическую интерпретацию логических выражений в геометри-

ческую интерпретацию, данную авторами, выражается фактом (не упомянутым ими), что сумма $\Sigma_{t\in T}X_t$ подмножеств X_t пространства $\mathfrak{X}$ является проекцией на ось $\mathfrak{X}$ множества всех точек $\langle t, x\rangle$, где $x \in X_t$. J. Łoś

6335. Алгебраические модели аксиоматических теорий. Расёва (Algebraic models of axiomatic theories. Rasiowa H.), Fundam. math., 1955, 41, № 2, 291—310 (англ.)

Работа состоит из двух частей. В первой части рассматриваются так называемые алгебраические модели для аксиоматических теорий, основанные на логическом исчислении первого порядка. При этом имеется в виду логическое исчисление первого порядка, построенное не обязательно на базе обычного двузначного исчисления высказываний, а на безе произвольного исчисления высказываний, удовлетворяющего предположению, которое можно (хотя и не совсем строго) выразить следующим образом: каждая (конечная или бесконечная) матрица этих систем является структурой. Системы исчисления высказываний и построенные над ними системы исчисления предикатов исследовались прежде Расёвой и Сикорским (РЖМат, 1955, 4824). Различие между системами, рассмотренными в упомянутой статье, и системами, которые рассматриваются в реферируемой работе, состоит в том, что в последней допускаются системы, содержащие символы для функций, аргументы и значения которых являются индивидуумами.

Понятие алгебраической модели, данное в частном случае теорий без кванторов Лосем (Łoś J., O matrycach logicznych, Proc. Wrocławsk. towarz. nauk, 1949, B19, 5—42), содержалось неявно в цитированной работе Расёвой и Сикорского. Разница между алгебраической и обыкновенной моделью состоит в том, что значения пропозициональных функций (интерпретирующих предикаты системы) являются элементами произвольной структуры и не являются — как в случае обыкновенных моделей — элементами 0, 1, образующими простейшую булеву алгебру. Излагаются несколько теорем об алгебраических моделях, которые показывают, что теоремы о полноте Сколема — Лёвенхейма и Геделя сохраняют силу при замене в них понятия модели понятием алгебраической модели.

Вторая часть работы посвящена исследованию так называемых конструктивных теорий. Это элементарные теории, основанные на гейтинговской логике и удовлетворяющие следующим двум условиям: 1) если дизъюнкция $\alpha \vee \beta$ — теорема, то или α или β является теоремой; 2) если $(\exists x)\ \alpha\ (x)$ — теорема, то существует терм ξ такой, что $\alpha\ (\xi)$ — теорема. Теория T конструктивна тогда и только тогда, когда все аксиомы этой теории выполнены в некоторой алгебраической модели N^0, которая некоторым естественным образом связана с теорией T. Точное описание модели N^0 в кратком реферате невозможно, ограничимся указанием, что построение этой модели связано с топологической интерпретацией логики Хейтинга (см. РЖМат, 1955, 4824) и основано на легкой теореме, утверждающей, что для любого топологического пространства X можно найти топологическое пространство X_1, имеющее ровно одну лишнюю точку по сравнению с X и такое, что единственным открытым множеством, содержащим $X_1 - X$, является X_1.

В качестве вывода из этого необходимого достаточного условия конструктивности автор получает теорему о том, что если в аксиомы теории (отличные от аксиом тождества) знаки дизъюнкции и квантора существования входят только под знаком отрицания и в качестве первого члена импликации — в частности, если аксиомы не содержат символов дизъюнкции и квантора существования,— то теория конструктивна. Для иллюстрации этого результата рассматривается некоторая часть арифметики, образующая конструктивную теорию, в которой могут быть доказаны многие законы обычной арифметики. В последнем параграфе устанавливается некоторый аналог теоремы Эрбрана для конструктивных теорий, из которого получается положительное решение проблемы разрешимости для некоторых классов формул. A. Mostowski

6336. Об отношениях теории предикатов с семантикой в смысле Тарского. Фраисе (Sur les rapports entre la théorie des relations et la sémantique au sens de A. Tarski. Fraïssé Roland), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, A 5, 86 (франц.)

Рассматриваются предикаты с некоторой базой (областью индивидуальных переменных) E. Полипредикатом называется конечная последовательность $P=\{A_i\}$, где каждое A_i — либо предикат n_i аргументов, либо элемент E, называемый тогда базоном (bason). Сигнатурой P называется последовательность $\{n_i\}$, где $n_i = 0$, если A_i является базоном. Через PQ обозначается полипредикат, получаемый объединением предикатов и базонов полипредикатов P и Q с общей базой. Индуктивно вводится понятие n-подобия полипредикатов. Два полипредиката P и P' с общей сигнатурой и любыми базами называются 0-подобными, если их ограничения на множества базонов изоморфны. Предположим, что уже определены $(n-1)$-подобие и $(n-1)$-подподобие; тогда P и P' называются n-подобными, если для любого предиката A с базой полипредиката P (соответственно базона из этой базы) существует A' такое, что PA и $P'A'$ $(n-1)$-подобны; и обратно с заменой ролей P и P'. То же определение для подподобия, при условии, что A и A' обязательно базоны.

Утверждается, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы полипредикаты P и P' давали истолкование в смысле семантики тем же формулам узкого исчисления предикатов, является n-подподобие для каждого n. Аналогичный результат для расширенного исчисления (т. е. второй ступени) и n-подобия.

В. К. Детловс

6337. Проблема приложений формализированной логики. Фейс (Le problème des applications de la logique formalisée. Feys Robert), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, A5, 15—19 (франц.)

В докладе ставится проблема: получаются ли в естественных науках интересные научные результаты, если «перевести» эти науки на язык формализованной логики, понимаемой в смысле дедуктивной теории, т. е. с точными правилами вывода. До сих пор в математике новые теории и методы были открыты самими математиками без помощи логиков. Правда, в последнее время наблюдаются также и плодотворные применения логики к вопросам, собственно математическим. Однако основное применение логики в науке — критическое. Так, в математике были поставлены и исследованы проблемы, касающиеся данных формальных систем, например вопросы независимости и разрешимости. Докладчик предлагает ставить обратную задачу: построить систему с заданными свойствами.

В прениях Робинзон отмечает, что логика позволила формально выделить и исследовать различные классы утверждений. Так, например, неправильно сказать, что всякое утверждение, верное относительно поля алгебраических чисел, имеет место также для поля комплексных чисел. Но это уже будет правильно, если ограничиться утверждениями, формулированными в узком исчислении предикатов. Такие математические результаты было бы затруднительно получить средствами «классических» методов математики. Влияние логики на математику не ограничивается непосредственными применениями; под влиянием логики возникла, например, теория структур. В. К. Детловс

6338. Истинность и следствие в средневековой логике. Муди (Truth and consequence in mediaeval logic. Moody Ernest A. (Studies in logic and the foundations of mathematics) Amsterdam: North—Holland Publishing Co., 1953, VIII, 113 pp.) (англ.)

Сделана попытка осветить средневековую логику XIV столетия с позиций математической логики. Работа содержит 4 раздела: 1) Логика и язык; 2) Теория условий истинности; 3) Теория следствия; 4) Истинность и следствие. Отсутствие ссылок на источники снижает ценность работы. Л. Е. Майстров

6339. Проблемы, возникающие из применений логики к биологии. Вудлер (Problems arising from the application of mathematical logic to biology. Woodler J.-H. Applications scientifiques de la logique mathematique. pp. 133—139, discussion, pp. 139—140. Gauthier-Villars, Paris, E. Nauwelaerts, Louvain, 1954). Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 386

См. также: 6466

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

6340. К вопросу о делимости чисел. Дун Гуанчан (除數問題. I. 董光昌), 數學學報 (Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica), 1955, 5, № 3, 313—324 (кит.; рез. англ.)

Пусть $d_k(n)$ — число разложений n на k множителей,

$$D_k(x) = \sum_{n \leqslant x} d_k(n),$$

$$R_k(x) = (a_{k,0} + a_{k,1} \ln x + \cdots + a_{k,k-1} \ln^{k-1} x) \quad (x > 0)$$

есть вычет $\zeta^k(s) x^s s^{-1}$ при $s = 1$. Положим $\Delta_k(x) = D_k(x) - R_k(x)$. Основываясь на асимптотическом равенстве

$$\Delta_k(x) \sim \frac{x^{(k-1)/2k}}{\sqrt{k}\,\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1/2k}} \cos\left(2k\pi (nx)^{1/k} + \frac{k-3}{4}\pi\right),$$

принадлежащем автору и являющемся обобщением равенства Вороного (Вороной Г. Ф., Ann. Ecole Normale, 1904, **21**, сер. 3, 207—268, 459—534), доказываются теоремы:

1. Существуют положительные постоянные c_k и C_k такие, что для $x \geqslant 1$ и t, лежащего в интервале $[-C_k x^{(k-1)/2k},\ C_k x^{(k-1)/2k}]$, уравнение $\Delta_k(y) = t$ имеет по крайней мере одно решение, лежащее в интервале $[x,\ x + c_k x^{1-1/k}]$.

2. Существует такая положительная постоянная $\widetilde{C}_k$, что при $\lambda \geqslant 1$ и $x \geqslant 1$ имеет место следующее неравенство:

$$\sqrt[\lambda]{(1/x)\int_0^x |\Delta_k(y)|^{\lambda}\, dy} \geqslant \widetilde{C}_k x^{(k-1)/2k}.$$

Эти теоремы обобщают соответствующие результаты Харди и Титчмарша. Г. В. Емельянов

6341. Свойства решений диофантовых неравенств в поле формальных степенных рядов. Постников А. Г., Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 1, 21—22

Рассматриваются степенные ряды от x

$$\omega(x) = \sum_{n=-l}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

с коэффициентами из некоторого поля k. Такие ряды образуют поле. Каждому ряду вида (1) сопоставляется целое число — порядок ряда, определяемый равенством $\| \omega(x) \| = l$. Относительно порядка ряда в заметке формулируются лемма и теорема.

Лемма. Пусть имеются два степенных ряда $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ с коэффициентами из поля k. Какие бы ни были натуральные числа n и m, найдутся многочлены от $1/x$ $P(1/x)$, $Q(1/x)$ и $R(1/x)$, не равные тождественно нулю, такие, что $\| P(1/x) \| \leqslant m$; $\| Q(1/x) \| \leqslant n$;

$$\| P(1/x)\,\omega_1(x) + Q(1/x)\,\omega_2(x) - R(1/x) \| \leqslant m - n - 1.$$

Можно подобрать эти многочлены так, чтобы $\| P(1/x) \| = m$ или $\| Q(1/x) \| = n$. П. Г. Когония

6342. О линейном неоднородном диофантовом приближении. Барнс (On linear inhomogeneous diophantine approximation. Barnes E. S.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 1, 73—79 (англ.)

Пусть Φ — иррациональное число и $\Phi x + y + \alpha \neq 0$ для любых целых x, y. С помощью алгоритма для неоднородных бинарных квадратичных форм (РЖМат, 1955, 5601, 5602) доказывается теорема:

Для любого k, $0 \leqslant k \leqslant 1/4$ существует $\mathfrak{c}$ значений Φ и $\mathfrak{c}$ соответствующих значений α таких, что

$$\liminf_{|x| \to \infty} |\, x(\Phi x + y + \alpha)\,| = k,$$

$\mathfrak{c}$ — кардинальное число континуума. Отдельно рассматривается случай $x > 0$. Э. Е. Симакова

6343. Замечание о непрерывных дробях и теории размерности. Эванс (A note on continued fractions and dimension theory. Evans Arwel), J. reine und angew. Math., 1956, **195**, № 1—2, 102—107 (англ.)

Работа посвящена вопросу о размерности множества всех чисел

$$\alpha = [0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots], \qquad (1)$$

неполные частные которых принимают только заданные целые значения.

По этому вопросу существует теорема Гуда: Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ суть разные натуральные числа, а E' обозначает множество всех непрерывных дробей, неполные частные которых равны одному из α_i. Если $K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ обозначает знаменатель подходящей дроби непрерывной дроби (1), то уравнение

$$\sum_{a_1, a_2, \ldots, a_n} K(a_1, a_2, \ldots, a_n)^{-2t} = 1$$

(все возможные комбинации $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$) имеет единственный корень τ_n, причем

$$\lim_{n \to \infty} \tau_n = \tau = \dim E'.$$

Пусть r и s обозначают данные целые числа, $Q(u,v)$ — значение $K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при $a_i = r$ u раз и $a_i = s$ v раз, так что $u + v = n$. Далее пусть

$$\rho = [r;\ r,\ r,\ \ldots], \quad \sigma = [s;\ s,\ s,\ \ldots].$$

Основной результат состоит в доказательстве неравенств

$$A_1 r^u s^v \leqslant Q(u,\ v) \leqslant A_2 \rho^u \sigma^v,$$

где A_1, A_2 — положительные постоянные, не зависящие от u и v.

Из этого результата, на основании теоремы Гуда, получаются неравенства

$$\rho^{-2d} + \sigma^{-2d} \leqslant 1 \leqslant r^{-2d} + s^{-2d},$$

где $d = \dim E(r, s)$, а $E(r, s)$ — множество всех непрерывных дробей (1), для которых все a_k равны r или s.

Дается приложение этих результатов к дробным размерностям. П. Г. Когония

6344. Полурегулярные непрерывные дроби. Пиппинг (Halvregelbundna kedjebråk. Pipping Nils), Nord. mat. tidskr., 1955, **3**, № 3, 96—106 (швед.)

Вводятся полурегулярные непрерывные дроби, где вместе с обычными числителями $+1$ допускаются и числители (-1). Рассматриваются разложения квадратичных иррациональностей в такие дроби. Ю. В. Л.

6345. Об уравнении $X^3 + Y^3 = U^3 + V^3$. Менон (On the equation $X^3 + Y^3 = U^3 + V^3$. Menon P. Kesava), Math. Student, 1955, **23**, № 3, 101—103 (англ.)

Целые решения x, y, u, v уравнения

$$X^3 + Y^3 = U^3 + V^3 \tag{1}$$

называются примитивными, если $(x, y, u, v) = 1$.

Если k — поле рациональных чисел, $\rho = (-1 + \sqrt{-3})/2$ и $K = k(\rho)$, то каждое целое число в K можно однозначно выразить в форме $p + \rho q$. Пусть даны два целых числа в K, $p + \rho q$ и $r + \rho s$, такие что

$$(x + \rho y)(p + \rho q) = (u + \rho v)(r + \rho s).$$

Обозначив

$$\begin{aligned} P &= p^2 - pq + q^2, \quad R = (p + q)(r + s) - qr, \\ Q &= r^2 - rs + s^2, \quad S = (p + q)(r + s) - ps, \end{aligned} \tag{2}$$

получим решение уравнения (1)

$$\begin{aligned} \nu x &= Q^2 - PR, \quad \nu y = PS - Q^2, \\ \nu u &= QS - P^2, \quad \nu v = P^2 - QR. \end{aligned} \tag{3}$$

Если $(x, y, u, v) = 1$, то

$$\nu = (Q^2 - PR,\ QS - P^2,\ PS - Q^2,\ P^2 - QR). \tag{4}$$

Отсюда получается теорема: Каждое примитивное решение уравнения (1) соответствует одной группе целых p, q, r, s, удовлетворяющих условиям (2), (3) и (4), и каждой группе чисел p, q, r, s соответствует примитивное решение уравнения (1), x, y, u, v, определяемое условиями (3) и (4). В. А. Голубев

6346. Асимптотическая формула для роста числа абелевых полей типа $(l, l, \ldots, l)$. Уразбаев Б. М., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 4, 659—661

Рассматриваются абелевы поля степени l^k (l — простое) над полем рациональных чисел с элементарной абелевой группой Галуа. Теоремы, полученные автором ранее для $k = 2$ (РЖМат, 1955, 1618), переносятся на случай произвольного k. Асимптотическая формула для числа $N(x)$ полей, дискриминанты которых не превосходят $x^{l^{k-1}(l-1)}$, приводится без доказательства:

$$N(x) = xf(\log x) + O(x^{1-(l^k-1)^{-1}+\varepsilon}),$$

(f — многочлен степени $l^{k-1} + \cdots + l$, $\varepsilon > 0$).

З. И. Боревич

6347. Минимальный базис и несущественные дискриминантные делители для кубического поля. Торнхейм (Minimal basis and inessential discriminant divisors for a cubic field. Tornheim Leonard), Pacif. J. Math., 1955, **5**, № 4, 623—631 (англ.)

Показывается, что кубическое поле K содержит число θ такое, что: 1) $\theta^3 + a\theta^2 + b = 0$, где a, b — целые рациональные, 2) b не делится на куб простого делителя a, 3) если $3 \mid a$ и $3 \nmid b$, то дискриминант θ не делится на 81. Для поля K, заданного числом с указанными свойствами, строится целый базис (используя общий метод Вороного) и определяются условия, при которых число 2 есть общий делитель индексов всех целых чисел поля K. З. И. Боревич

6348. Представления билинейными формами в конечном поле. Ходжес (Representations by bilinear forms in a finite field. Hodges John H.), Duke Math. J., 1955, **22**, № 4, 497—509 (англ.)

Рассматривается задача: определить число $N_t^s(A, B)$ всех пар матриц U, V, удовлетворяющих уравнению

$$UAV = B, \tag{1}$$

где $A = A(m, n; r)$, $B = B(s, t; \rho)$, $U = U(s, m)$, $V = V(n, t)$ — матрицы указанных размеров и рангов, составленные из элементов конечного поля $GF(q)$, $q = p^f$ (p — простое).

Доказываются:

Теорема 1.

$$N_t^s(A, B) =$$

$$= q^{\rho(m+n-r)-\rho(\rho+1)/2} \prod_{i=1}^{\rho} (q^{r-i+1} - 1)\, N_{t-\rho}^{s-\rho}(A_\rho, 0),$$

где A_ρ — матрица размеров $(m - \rho) \times (n - \rho)$ и ранга $r - \rho$.

Теорема 2.

$$N_t^t(A, 0) = q^{ms+nt-st} \sum_{z=0}^{(s,t)} q^{-rz}\, g(s, t, z),$$

где $(s, t) = \min\{s, t\}$, $g(m, n, r)$ — число матриц размеров $m \times n$ и ранга r, определяемое формулой Ландсберга (Landsberg G., J. reine und angew. Math., 1893, **111**, 87—88). Выводятся некоторые следствия.

Б. М. Уразбаев

6349. Распределение конечного порядка симметрических, кососимметрических и эрмитовых матриц в конечном поле. Карлиц, Ходжес (Distribution of bordered symmetric, skew and hermitian matrices in a finite field. Carlitz L., Hodges John H.), J. reine und angew. Math., 1955, **195**, № 3—4, 192—201 (англ.)

Пусть $q = p^n$, $p > 2$ — простое число, $GF(q)$ — поле Галуа из q элементов.

Рассматривается задача: определить число всех матриц U размеров $m \times t$, составленных из элементов поля $GF(q)$ таких, чтобы матрица

$$M = \begin{bmatrix} A & U \\ U' & 0 \end{bmatrix}$$

имела ранг $m + r$, $0 \leqslant r \leqslant m$, t и инвариант λ (U' — транспонированная матрица).

Доказывается (теорема 1): если A — невырожденная симметрическая матрица порядка m, то искомое число матриц U равно

$$\theta_t(A, m, r, \lambda) = N(t, r, \lambda')\, N_t(A, B),$$

где B — симметрическая матрица порядка t, ранга r и инварианта λ', $N(t, r, \lambda')$ — число матриц порядка t, ранга r и инварианта λ', $N_t(A, B)$ — число матриц U размеров $m \times t$, удовлетворяющих $U'AU = B$ (РЖМат, 1955, 1631). Если же A — вырожденная симметрическая матрица, то число указанных матриц представляется более сложной рекуррентной формулой (теорема 2).

Аналогичные результаты получаются и для случаев, когда A есть кососимметрическая и эрмитова матрицы с разбором каждый раз случаев вырожденных и невырожденных A (теоремы 3—6). Б. М. Уразбаев

6350. **Заметка о степенных вычетах. Карлиц** (A note on power residues. Carlitz L.), Duke Math. J., 1955, **22**, № 4, 583—587 (англ.)

Пусть $p = km+1$ — простое нечетное, $k>1$, $m>1$, g — первообразный корень по mod p. Числа $1, \ldots, p-1$ разбиваются на k классов $C_0, \ldots, C_{k-1}$, именно: к классу C_i относятся числа a, для которых $a \equiv g^{ks+i} \pmod p$ при некотором s. Через A_i обозначается произведение всех чисел класса C_i. Находится значение A_i по mod p^2.

В. Б. Демьянов

6351. **Некоторые свойства квадратичных вычетов. Гупта** (Some properties of quadratic residues. Gupta Hansraj), Math. Student, 1955, **23**, № 3, 105—107 (англ.)

Пусть p — простое нечетное, μ — натуральное число, R — совокупность всех квадратичных вычетов, а N — совокупность всех невычетов по mod p^μ из некоторой приведенной системы представителей. Если t — целое число и S — некоторая совокупность целых чисел, то через $t \oplus S$ обозначается совокупность сумм вида $t+s$, где s пробегает S. Рассматривается вопрос о числе квадратичных вычетов и невычетов по mod p^μ в совокупностях $n \oplus R$, $r \oplus N$, $n \oplus N$, $r \oplus R$, где n — произвольный фиксированный невычет, а r — произвольный фиксированный вычет по mod p^μ. Доказывается: 1) каждая из совокупностей $n \oplus R$ и $r \oplus N$ имеет $p^{\mu-1}[p/4]$ вычетов и столько же невычетов; 2) совокупность $r \oplus R$ имеет $p^{\mu-1}[(p-3)/4]$ вычетов и $p^{\mu-1}[(p-3)/4] + p^{\mu-1}$ невычетов, а совокупность $n \oplus N$ имеет $p^{\mu-1}[(p-3)/4]+p^{\mu-1}$ вычетов и $p^{\mu-1}[(p-3)/4]$ невычетов. При этом в совокупностях учитываются лишь вычеты и невычеты, не делящиеся на p.

В. Б. Демьянов

6352. **Некоторые числа, связанные с числами Бернулли. Раф** (Some numbers related to the Bernoulli numbers. Rough Mike, Jr), Math. Mag., 1955, **29**, № 2, 101— 103 (англ.)

Доказываются формулы

$$\sum_{v=1}^{n} (-1)^{v+1} v^s =$$

$$= (-1)^{n+1}\left(\beta_0 n^s + \frac{\beta_1}{1!} s n^{s-1} + \frac{\beta_2}{2!} s(s-1) n^{s-2} + \right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{\beta_s}{s!} s(s-1)\cdots 2\cdot 1\right) + \beta_s,$$

где

$$\frac{1}{e^{-x}+1} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\beta_v}{v!} x^v.$$

Даны четыре следствия, из них:

1) $2\beta_i = 1 - \sum_{v=0}^{i-1} \beta_i \binom{s}{v}$,

2) $\beta_{2i} = 0$ при $i \geqslant 1$;

4) $B_{2i} = \beta_{2i-1}\, 2i/(2i-1)$,

где B_v — числа Бернулли, определяемые формулой

$$x/(e^x - 1) = \sum_{v=0}^{\infty} (B_v/v)\, x^v.$$

Первые числа β_i следующие: $\beta_0 = 1/2$, $\beta_1 = 1/4$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1/8$, $\beta_4 = 0$, $\beta_5 = 1/4$, $\beta_6 = 0$, $\beta_7 = -17/16$, $\beta_8 = 0$, $\beta_9 = 31/4$.

В. А. Голубев

6353. **Некоторые свойства чисел Фибоначчи. —1. Субба-Рао** (Some properties of Fibonacci numbers — I. Subba Rao K.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, **46**, № 4, 253—257 (англ.)

Элементарно доказывается, что число чисел Фибоначчи, не превышающих n, асимптотически равно $\log n/\log a$, где $a = (1+\sqrt{5})/2$.

Автор находит по величине числа Фибоначчи его номер и количество знаков и показывает, что число чисел Фибоначчи с определенным количеством знаков есть 4 или 5. Отсюда получается утверждение, что для нахождения общего наибольшего делителя двух чисел алгоритмом Евклида нужно проделать в одних случаях $5m$ делений, а в других менее чем $5m$, где m — число знаков меньшего числа.

М. А. Пробст

6354. **О некоторых равенствах Люка. Клямкин** (On some identities of Lucas. Klamkin Murray S.), Scripta Math., 1955, **21**, № 2—3, 213—214 (англ.)

Три равенства Люка

$$\left[\sum_1^N a_r\right]^2 = \sum_1^N a_r^3, \tag{1}$$

$$3\left[\sum_1^N a_r^2\right]^2 = \sum_1^N [2a_r^5 + a_r^3], \tag{2}$$

$$2\left[\sum_1^N a_r^3\right]^2 = \sum_1^N [a_r^7 + a_r^5] \tag{3}$$

верны при $a_r = r$.

Указывается, что из других последовательностей с вещественными членами удовлетворяют данным равенствам только следующие:

$$a_r = 0,\ (-1)^{r+1},\ r-1 \text{ для (1) и для (3)},$$

$$a_r = 0,\ r-1,\ (2r-1)/2,\ \delta_2^r/2 \text{ для (2)},$$

где δ_2 — дельта Кронекера.

Доказательство дано для (2).

В. А. Голубев

6355. **Некоторые свойства подходящих дробей для $\sqrt{2}$. Блок** (Some properties of the convergents of $\sqrt{2}$. Block Daniel), Scripta Math., 1955, **21**, № 2—3, 208—213 (англ.)

Если p_m/q_m — m-ая подходящая дробь разложения в непрерывную дробь, то, как известно, $p_m^2 - 2q_m^2 = (-1)^m$.

Рассматриваются другие свойства подходящих дробей, например: $p_m^2 - 2q_{m+1}^2 = -p_{2m+1}$; $p_m^2 - 2q_{m+t}^2 = -p_t p_{2m+t}$ при нечетном t; $p_m^2 - 2q_{m+t}^2 = -2q_t q_{2m+t} + (-1)^m$ при четном t; $p_m^2 - 2q_{m+2g+1}^2 = -(p_g^2 - 2q_{g+1}^2) \times (p_{m+g}^2 - 2q_{m+g+1})$ при $t = 2g+1$.

Доказывается теорема: Если $r+n = u+v$, то $p_r p_n - 2q_v q_u = (-1)^n p_{u-n} p_{v-n}$.

Дано несколько свойств подходящих дробей для случая $\sqrt{r^2+1}$.

В. А. Голубев

6356. **Многостепенные сравнения. Паламà** (Congruenze multigrade. Palamà G.), Period. mat., 1955, **33**, № 4, 230—234 (итал.)

Многостепенным сравнением называется система сравнений вида

$$a_1^k + \cdots + a_n^k \equiv b_1^k + \cdots + b_n^k \pmod p$$
$$(k = s_1, s_2, \ldots, s_m),$$

что записывается короче

$$a_1, \ldots, a_n \overset{m}{\equiv} b_1, \ldots, b_n \pmod p,$$

если $k \leqslant m$ проходит все целые значения от 1 до m.

Дана теорема: сравнение

$$a_1, \ldots, a_{n-m} \overset{n}{\equiv} b_1, \ldots, b_{n-m} \pmod p,$$

где p — простое, m — целое неотрицательное, не имеет решений, кроме тривиального, когда все члены a_i левой части сравнимы по модулю p с членами b_i правой части. Даны примеры. В. А. Голубев

6357. О проблеме перемещений в сосудах. Сад (Sur le problème des transvasements. Sade A.), J. reine und angew. Math., 1956, **195**, № 1—2, 1—2 (франц.)

Имеются три помещения A, B, C, содержащие вместе s книг. Вместимость A не меньше s, вместимость B равна p, вместимость C равна q $(s > p > q)$, $(p, q) = 1$. Пусть i — начальное, f — конечное число книг в B. Как перейти от i к f путем перемещений?

Эта проблема привлекала внимание многих математиков. Баше (Bachet, Problèmes délectables, 1624, p. 206) рассмотрел вопрос при $s = 8$, $p = 5$, $q = 3$, $i = 0$, $f = 4$. Автор рассматривает критерий возможности решения и число необходимых перемещений. В. А. Голубев

6358. Понятие модуля целых чисел, приложенное к доказательству теоремы Гаусса в ее общей форме. Леграи (La notion de «module d'entiers» appliquée à la démonstration du théorème de Gauss sous sa forme générale. Lagrand Jacques), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, **35**, № 176, 318—319 (франц.)

6359. Рациональные аналоги логарифмической функции. Ламбек, Мозер (Rational analogues of the logarithm function. Lambek J., Moser L.), Math. Gaz., 1956, **40**, № 331, 5—7 (англ.)

6360 К. Теория чисел. Обрешков (Теория на числата. Обрешков Н. София, Наука и изкуство, 1955, 272 стр., 9.05 лв.), Българ. книгопис, 1955, **59**, № 11, 8 (болг.)

6361 К. Числовая система. Терстон (The number system. Thurston Hugh. Ansfrid. London, Blackie, 1956, xiii, 134 pp., 15 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 317, 9 (англ.)

6362 К. Занимательное и замечательное о числах и формах. Лицман (Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen. Lietzmann Walther. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1955, 276 S., ill., 11.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 51, 901 (нем.)

6363 Д. О некоторых неравенствах между высшими арифметическими минимумами звездных тел. Шмидт (Über gewisse Ungleichungen zwischen den höheren arithmetischen Minima von Sternkörpern. Schmidt Wolfgang. — Diss. phil. Wien, 1955, V, 111 Bl. — Maschinenschr.), Oesterr. Bibliogr., 1956, № 4, 21 (нем.)

См. также: 6386, 6445

АЛГЕБРА

6364. Абстрактные алгебраические понятия в преподавании элементарной математики. Шеврие (Les notions de structure en mathématiques élémentaires. Chevrier J. L. P.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 417—418 (франц.)

Указывается, что уже в рамках элементарной математики имеется достаточно материала для иллюстрации основных понятий современной алгебры.

6365 К. Современная алгебра. Кезанн, Делаше (L'algèbre moderne. Queysanne Michel, Delachet André. Paris, Presses univ. France, 1955, 136 p. ill., 153 fr.), Bibliogr. France, 1955, **144**, № 41, 897 (франц.)

6366 К. Высшая алгебра. Обрешков (Висша алгебра. Обрешков Н. София, Наука и изкуство, 1954, 520 стр., 19—10 лв.) (болг.)

6367 К. Специальный курс элементарной алгебры. (Для пед. ин-тов). Изд. 4-е, перераб. Новоселов С. И. М., «Сов. наука», 1956, 528 стр., 10 р. 80 к.

6368 К. Абстрактная алгебра и алгебраическая геометрия. Часть I. Абстрактная алгебра. Морин (Algebra astratta e geometria algebrica. Parte I: Algebra astratta. Morin Ugo. Padova, Casa ed. dott. A. Milani, 1953, xvi, 263 p., 2200 L.), Bibliogr. ital., 1955, **89**, № 647, 133 (итал.)

6369 К. Алгебра; ее ключевые концепции и основные принципы. Фер (Algebra; its key concepts and fundamental principles; Fehr Howard Franklin, courses 1—2, 2bks., Heath, 1955, 484 pp., 502 pp., ill., 3 doll.), Cumul. Book Index, 1955, **58**, № 2, 33 (англ.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

6370. Замечания к одной известной комбинаторной формуле. Брауман (Bemerkungen zi einer aus der Kombinatorik bekannten Formel. Braumann Pedro), Univ. Lisboa. Revista Fac. Ci. A. Ci. Mat., 1954, **3**, № 2, 158—160 (нем.)

Выражения для моментов суммы независимых переменных выводятся с помощью формулы для степени суммы. O. Ore

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 3.

6371. О проблеме истории китайской математики. Туран (A kinai matematika történetének egy problémájáról. Turán Pál), Mat. lapok, 1954, **5**, № 1, 1—6 (венг.; рез. русс., англ.)

Китайским математиком Ли Жэнь-су в одном из трудов, вышедших в 1867 г. в Нанкине, дается без доказательства следующее положение:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2. \qquad (1)$$

Автор доказывает это утверждение аналитическим методом, используя свойства полиномов Лежандра. J. Takács

6372. Замечание к работе П. Турана «Об одной проблеме китайской математики». Такач (Megjegyzés Turán Pál «A kínai matematika történetének egy problémájáról» című dolgozatához. Takács Lajos), Mat. lapok, 1955, **6**, № 1, 27—29 (венг.; рез. русс., англ.)

6373. Замечание об одной проблеме китайской математики. Шураньи (Megjegyzések a kínai matematika történetének egy problémájához. Surányi János), Mat. lapok, 1955, **6**, № 1, 30—35 (венг.; рез. русс., англ.)

6374. Об одной проблеме китайской математики. Хусар (A kínai matematika történetének egy problémájáról. Huszár Géza), Mat. lapok, 1955, **6**, № 1, 36—38 (венг.; рез. русс., англ.)

6375. Об одной проблеме китайской математики. Карлиц (A kínai matematika történetének egy

problémájáról. Carlitz L.), Mat. lapok, 1955, 6, № 2—3, 219—220 (венг.; рез. русс., англ.)
Различные доказательства тождества

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2.$$

6376. К вопросу об отыскании рациональных корней многочлена. Тонков Л. В., Тр. Ижевского механ. ин-та, 1955, № 1, 85—88

6377. О делимости двух специальных многочленов. Бини (Sulla divisibilità di due particolari polinomi. Bini Umberto), Period. mat., 1955, 33, № 3, 175—177 (итал.)

Пусть $A=x+y+z$, $B=xy+xz+yz$, $P=xyz$. Доказано, что для произвольного $n\geqslant 3$ многочлен $F_n=[A^n-(x^n+y^n+z^n)]/n$ делится на многочлен $AB-P$. В процессе доказательства для любых натуральных m и r устанавливается, что $\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\times$ $\times\binom{m-s}{r-1}=0$. Е. Г. Шульгейфер

6378. Графические условия отрицательности действительных частей корней алгебраического уравнения. Митрович (Conditions graphiques pour que toutes les racines d'une équation algébrique soient à parties réelles négatives. Mitrović Dusan), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 11, 1177—1179 (франц.)

С помощью принципа аргумента доказывается, что все корни многочлена $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ с действительными коэффициентами тогда и только тогда лежат левее мнимой оси, когда $a_{n-1}>0$, $a_n>0$ и кривая

$$\xi=a_{n-3}t^2-a_{n-5}t^4+a_{n-7}t^6-\ldots$$
$$\eta=a_{n-2}t^2-a_{n-4}t^4+a_{n-6}t^6-\ldots$$

при изменении параметра t от 0 до ∞ пересекает поочередно прямые $\eta=a_n$ и $\xi=a_{n-1}$, причем прямая $\eta=a_n$ пересекается первой, а общее число точек пересечения равно $n-1$. Г. С. Бархин

6379. О взаимной связи между графическими и алгебраическими критериями устойчивости. Хан (Über Zusammenhänge zwischen den graphischen und den algebraischen Stabilitätskriterien. Hahn W.), Z. angew. Math. and Mech., 1955, 35, № 3, 119 (нем.)

Критерий Рауса, устанавливающий необходимые и достаточные условия расположения всех корней многочлена слева от мнимой оси, доказывается исходя из критерия устойчивости Найквиста. Идея доказательства: понижение степени данного многочлена без изменения расположения корней (кроме одного исчезающего) относительно мнимой оси. Последовательное понижение степени с учетом требования, чтобы исчезающий корень был расположен слева от мнимой оси, сразу приводит к неравенствам Рауса (см. также Айзерман, Теория автоматического регулирования двигателей, М., 1952, стр. 285). М. А. Айзерман

6380. Действия над корнями. Лабутин Д. Н., Уч. тр. Пятигор. гос. пед. ин-та, 1955, 8, 27—55

6381. О решении систем линейных уравнений. Ван Шоу-и (線性方程組的直除解法. 王守義), 數學通訊 (Шусюэ тунсюнь) 1955, № 51, 14—20 (кит.)

6382. Положительные и отрицательные решения системы линейных неравенств. Черников С. Н., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 6, 913—916

С помощью критерия совместности системы линейных неравенств, содержащегося в предыдущей работе автора (РЖМат, 1953, 68), выводятся некоторые признаки существования решения системы линейных неравенств или системы линейных уравнений, удовлетворяющего для некоторых $k_1,\ldots,k_l$ одному из следующих условий:

а) $x_{k_i}\geqslant 0$; а′) $x_{k_i}\leqslant 0$; б) $x_{k_i}\geqslant 0$ и $\Sigma x_{k_i}>0$; б′) $x_{k_i}\leqslant 0$ и $\Sigma x_{k_i}<0$; в) $x_{k_i}>0$; в′) $x_{k_i}<0$, $i=1,\ldots,l$;

Г. Ш. Рубинштейн

6383. О пучках вещественных кубических тройничных форм. Соколов Н. П., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, 19, № 3, 201—232

Пусть f и φ — кубические формы с вещественными коэффициентами, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — их кубические матрицы. Рассматривается пучок кубических форм $\mu f+\nu\varphi$, где μ и ν — переменные параметры. Полиномиальная кубическая матрица $M(\mu,\nu)=\mu\mathcal{A}+\nu\mathcal{B}$ называется матрицей этого пучка. Пусть $D_i(\mu,\nu)$ — наибольший общий делитель кубических миноров i-го порядка матрицы $M(\mu,\nu)$ и пусть $e_i=l_i-l_{i-1}$, где l_i — показатель наивысшей степени, в которой некоторый линейный множитель входит в $D_i(\mu,\nu)$ (l_0 полагается равным нулю). Как легко видеть, числа e_i неотрицательны. Символ $[e_1,\ldots,e_k]$, где $e_1,\ldots,e_k$ — отличные от нуля числа e_i, соответствующие всевозможным линейным множителям многочленов $D_i(\mu,\nu)$, называется характеристикой матрицы $M(\mu,\nu)$. Числа $e_1,\ldots,e_k$, соответствующие одному и тому же линейному множителю, группируются внутри символа $[e_1,\ldots,e_k]$ в круглые скобки, а числа, соответствующие комплексно сопряженным множителям, отмечаются сверху черточкой. Оказывается, что характеристика матрицы $M(\mu,\nu)$ пучка тройничных кубических форм не меняется при невырожденных вещественных линейных преобразованиях. Строятся и другие инварианты пучка. Пучок называется регулярным, если ранг матрицы $M(\mu,\nu)$ равен трем. В этом случае $e_1+\ldots+e_k=3$. Дается классификация регулярных пучков, рассматриваемых геометрически как пучки вещественных линий 3-го порядка на проективной плоскости. Пучки разбиваются на категории в зависимости от их характеристики, для которой возможны следующие семь значений: [(111)], [111], [$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$], [(11)1], [21], [(21)], [3]. В первом из этих случаев все линии пучка совпадают. Остальные шесть категорий подразделяются далее на типы, определяемые значениями других инвариантов пучка. Для каждого типа пучков линий 3-го порядка указываются его характерные геометрические свойства.

В. Б. Демьянов

6384. Границы для определителей. Бреннер (Bounds for determinants. Brenner J. L.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 6, 452—454 (англ.)

Основной результат: Если строки квадратной матрицы так разбиты на несколько групп, что модуль главного минора в каждой группе строк превосходит сумму модулей остальных миноров, составленных из той же группы строк, то определитель матрицы отличен от нуля. Д. К. Фаддеев

6385. Векторы, матрицы и определители, тензоры. Форте (Vecteurs, matrices et déterminants, tenseurs. Fortet R.), Bull. Soc. franç. électriciens, 1955, 5, № 58, 710—726 (франц.)

6386. Один специальный определитель. Карлиц (A special determinant. Carlitz L.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 4, 242—243 (англ.)

Доказано, что при p простом и $2n-1=p$ определитель $\Delta_n=|a_{ij}|=|j^{2(i-1)}|$ не делится на p. Другим

способом это утверждение было ранее доказано В. Шапиро (РЖМат, 1955, 2111). Е. П. Ожигова

6387. Об одном свойстве положительно определенных матриц. Дюпарк, Переманс (A property of positive definite matrices. Duparc H. J. A., Peremans W.), Math. Centrum Amsterdam. Rapport ZW 1954 —006, 5 pp. (англ.)

Доказано что m-я присоединенная матрица положительно определенной матрицы положительно определенна. Если $Z_1,\ldots, Z_k$ — $n \times m$-матрицы, $m \leqslant n$, и A — положительно определенная матрица, то определитель $\det_{1\leqslant r,s\leqslant k}[\det(Z_r^* A Z_s)]$ неотрицателен. J. L. Brenner

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 10, 847.

6388. О границах некоторых определителей. Островский (Note on bounds for some determinants. Ostrowski A. M.), Duke Math. J., 1955, **22**, № 1, 95—102 (англ.)

Пусть $A = (a_{\mu\nu})$ — действительная квадратная матрица n-го порядка, $\| A \|$ — модуль ее определителя $| A |$;

$$\delta_\mu = | a_{\mu\mu} | - \Sigma_{\nu\neq\mu} | a_{\mu\nu} |;$$

$$a_\mu = \min_{\nu\neq\mu} a_{\mu\nu}, \quad A_\mu = \max_{\nu\neq\mu} a_{\mu\nu}, \quad \alpha_\mu = \min_\nu | a_{\mu\nu} |;$$

$$d_\mu = a_{\mu\mu} - \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} | a_{\mu\nu} |; \quad d'_\mu = a_{\mu\mu} - \sum_{\nu\neq\mu} a_{\mu\nu},$$

$$d''_\mu = a_{\mu\mu} + \sum_{\nu\neq\mu} a_{\mu\nu},$$

$$\Delta_k = | (a_{\mu\nu} - a_{\mu k}) |; \ (\mu, \nu \neq k; \ k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n), \ u^+ = \frac{1}{2}(u + | u |).$$

Получены следующие результаты:

1. Если $a_\mu \geqslant 0$; $d_\mu \geqslant 0$; $a_\mu + d_\mu > 0$ $(\mu = 1, \ldots, n)$, то

$$| A | \geqslant \left[1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{r_\nu + (n-2)\, a_\nu}\right] \prod_{\nu=1}^{n} (d_\nu + (n-2)\, a_\nu)$$

2. Если $d_\mu \geqslant 0$; $\delta_\mu \geqslant 0$; $\alpha_\mu + \delta_\mu > 0$; $(\mu = 1,2,\ldots, n)$, то

$$\| A \| \geqslant \left[1 - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu}{\delta_\nu + n\alpha_\nu}\right] \prod_{\nu=1}^{n} (\delta_\nu + n\alpha_\nu).$$

3. Если $a_{\mu\mu} > nA_\mu^+ - \sum_{\nu\neq\mu} a_{\mu\nu}$; $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$, то $| A | > 0$.

4. Если $d'_\mu + (n-2)\, a_\mu \geqslant 0$; $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$; $d''_\mu - nA_\mu \geqslant 0$; $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$, то $\Delta_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

5. Если $d_\mu \geqslant (n-2)\, A_\mu^+$; $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$, то $\Delta_k \geqslant 0$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Предложение 2) имеет место и для комплексных матриц. А. Ф. Голубчиков

6389. О разложении матриц на множители и его применении к решению систем линейных уравнений. Эгервари (Über die Faktorisation von Matrizen und ihre Anwendung auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen. Egerváry E.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, **35**, № 3, 111—118 (нем.; рез. англ., франц., русс.)

Показано, что любая система линейных однородных уравнений $Ax = 0$, где A — некоторая (вообще говоря, прямоугольная) матрица, эквивалентна системе уравнений $Cx = 0$, где C — треугольная матрица, для которой существует такая матрица B, что $A = BC$. Указан практически выполнимый алгоритм вычисления матрицы C. А. Ф. Голубчиков

6390. Абстрактное ядро конструкции характеристик Вейра для матриц. Новотный (Abstraktní jádro Weyrovy konstrukce charakteristických čísel matic. Novotný M.), Spisy vyd. přírodověd. facult. Masarykovy univ., 1953, № 2, 41—51 (чеш.; рез. русс., франц.)

Для некоторого класса эндоморфизмов (так называемых A-деформаций) A-проективных пространств (Haupt, Nöbeling, Pauc, J. reine und angew. Math., 1940, **181**, 239—241) определяются и изучаются характеристические числа, обобщающие известные характеристические числа в смысле Вейра (Weyr E., Monatsh. Math. und Phys.) 1890, **1**, 163—236). М. П. Щеглов

6391. Переходные матрицы, встречающиеся в теории процессов Маркова. Годдард (Transition matrices occurring in the theory of Markoff processes. Goddard L. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 2, 382—384 (англ.)

Матрица $A = \| a_{ij} \|^n$ называется переходной, если $a_{ij} \leqslant 0\ (i \neq j)$ и $\Sigma_{j\neq i} a_{ij} = -a_{ii}\ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ (в тексте имеется описка при указании индекса суммирования). В работе изучаются некоторые свойства переходных матриц в их связи со стохастическими матрицами. Т. А. Сарымсаков

6392. О матричной задаче на минимум. Велткамп, Дюпарк, Переманс (A minimum problem on matrices. Veltkamp G. W., Duparc H. J. A., Peremans W.), Math. Centrum Amsterdam, 1954, Rapport ZW 1954 —007, 2 pp. (англ.)

Пусть C, P и E — постоянные положительно определенные соответственно $m \times n$-, $m \times k$- и $k \times 1$-матрицы. Ставится вопрос о том, каков минимум величины $\tau^2 = E^*(LP)^{-1} LCL^* (P^*L^*)^{-1} E$, где L — произвольная $k \times m$-матрица. Доказывается, что он равен $E^*(P^*C^{-1}P)^{-1}E$ и достигается при $L = P^*C^{-1}$. I. L. Brenner

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 327.

6393. Геометрии и матрицы инцидентности. Райзер (Geometries and incidence matrices. Ryser H. J.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 7, 25—31 (англ.)

Обзорная статья, касающаяся вопросов, связанных с матричным уравнением $XX' = (b_{ij})$, где $b_{ii} = k$, $b_{ij} = \lambda\ (i \neq j)$; k и λ — натуральные числа. Доказательств нет. Библ. 22 назв., в том числе РЖМат, 1954, 1990, 1996, 5195; 1955, 4243. Л. А. Скорняков

6394. Одно экстремальное свойство сумм собственных значений. Виландт (An extremum property of sums of eigenvalues. Wielandt Helmut), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 1, 106—110 (англ.)

В n-мерном унитарном пространстве R_n рассматривается эрмитов оператор A с собственными значениями $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$. Через S обозначается совокупность k различных натуральных чисел $i < j < \ldots < l < m$, каждое из которых $\leqslant n$. Доказывается следующая формула:

$$\sum_{\sigma\in S} \alpha_\sigma = \max_{R_i \subset \ldots \subset R_m} \min_{x_\sigma \in R_\sigma} \sum_{\sigma\in S} (Ax_\sigma, x_\sigma).$$

$$\dim R_\sigma = \sigma \quad (x_\alpha, x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

В качестве следствия выводится следующая оценка собственных значений суммы двух эрмитовых матриц:

Пусть A, B и C — такие эрмитовы матрицы порядка n, что $A+B=C$. Пусть α_ν, β_ν и γ_ν — занумерованные в убывающем порядке собственные значения матриц A, B и C. Тогда

$$\gamma_i+\gamma_j+\cdots+\gamma_l+\gamma_m\leqslant\alpha_i+\alpha_j+\cdots+\alpha_l+\alpha_m+$$

$$+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{k-1}+\beta_k.$$

Оказывается, что это утверждение эквивалентно одной теореме референта (Докл. АН СССР, 1950, **75**, 769).

В. Б. Лидский

6395. О нормах матриц. Островский (Über Normen von Matrizen. Ostrowski Alexander), Math. Z., 1955, **63**, № 1, 2—18 (нем.)

Нормы квадратных матриц A с элементами из поля действительных или комплексных чисел, определяемые аксиомами Гаучи (РЖМат, 1954, 3620), отличающимися от аксиом норм матриц, приведенных в книге Фаддеевой (Фаддеева В. П., Вычислительные методы линейной алгебры, М.—Л., Гостехиздат, 1950, стр. 65), лишь тем, что отбрасывается аксиома: $N(AB)\leqslant N(A)\,N(B)$, автор называет общими нормами. Нормы матриц, удовлетворяющие всем аксиомам Фаддеевой, называются мультипликативными нормами. Доказывается, что первую аксиому мультипликативных норм: $N(A)>0$ для $A\neq 0$ можно заменить более слабой аксиомой: $N(A)\geqslant 0$ и $N(A_0)>0$ хотя бы для одной матрицы A_0. Для мультипликативной нормы M передоказывается утверждение, что $M(A)\geqslant\lambda_A$, где λ_A — модуль максимального собственного значения матрицы A (см. указанную выше книгу В. П. Фаддеевой).

Пусть $h_1(\xi)$ и $h_2(\xi)$ — произвольные общие нормы векторов. Норма матриц $S_{h_1,h_2}(A)=\sup_{\xi\neq 0}h_1(A\xi)/h_2(\xi)$ называется граничной нормой, а норма $S_{h_1,h_1}(A)=S_{h_1}(A)$ — симметрической граничной нормой. С другой стороны, каждая общая норма матриц N определяет общую норму $h_N(\xi)$ векторов, равную по определению норме $N(A_\xi)$, где A_ξ — квадратная матрица, первый столбец которой совпадает со столбцом ξ, а на остальных местах стоят нули. Если M — мультипликативная норма матриц, то $M(A)\geqslant S_{h_M}(A)$.

Доказано, что отношение $N(A)/N_1(A)$ любых двух общих норм матриц заключено между двумя положительными числами, не зависящими от A; пусть $(\lambda-\lambda_1)^{m_1}$, $(\lambda-\lambda_2)^{m_2}$, ..., $(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ — элементарные делители матрицы A; $\lambda_A=|\lambda_1|=\ldots=|\lambda_r|>|\lambda_{r+1}|\geqslant\ldots\geqslant|\lambda_k|$ и $M\equiv m_1=\ldots=m_s\geqslant m_{s+1}\geqslant\ldots\geqslant m_r$.

Оказывается, что любая общая норма N удовлетворяет соотношению $p_1<N(A^t)/t^{M-1}\lambda_A^t<p_2$, где $t>0$ и p_1, p_2 — положительные числа, не зависящие от t. Если, кроме того, $\lambda_1=\ldots=\lambda_s$, то отношение $N(A^t):t^{M-1}\lambda_A^t$ при $t\to\infty$ стремится к некоторому положительному значению. Далее доказано, что $\sqrt[t]{N(A^t)}\to\lambda_A$ при $t\to\infty$. Это утверждение было ранее доказано Гаучи (РЖМат, 1954, 3620) лишь для граничных норм.

В последнем параграфе рассматриваются, вообще говоря, прямоугольные матрицы и их так называемые гельдеровы нормы: $|A|_p=(\sum_{\mu,\nu}|a_{\mu\nu}|^p)^{1/p}$, где $p\geqslant 1$.

Приводятся различные оценки гельдеровых норм произведения двух или нескольких матриц (если это произведение существует) через нормы сомножителей. Например, справедливы следующие утверждения:

1) Если матрица AB существует и $1\leqslant p\leqslant 2$, то $|AB|_p\leqslant|A|_p|B|_p$; это неравенство тогда и только тогда справедливо при любом $p>2$, когда матрица A одностолбцовая, а матрица B однострочечная.

2) Если $p\geqslant 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и матрица AB существует, то $|AB|_p\leqslant|A|_p|B|_q$ и $|AB|_p\leqslant|A|_q|B|_p$. При $1\leqslant p<2$ первое (второе) из этих неравенств справедливо тогда и только тогда, когда матрица B одностолбцовая (матрица A однострочная).

Кроме того, приводятся некоторые свойства граничных норм матриц, определяемых гельдеровыми нормами векторов. Опечатка: стр. 6, в строке 11 сверху вместо слова «Zeile» должно быть «Kolonne», а вместо «Kolonne» должно быть «Zeile». Е. Г. Шульгейфер

6396 К. Линейная алгебра. Пиккерт (Lineare Algebra. Pickert Günter. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Band I. Algebra und Zahlentheorie. I. Teil. B. Algebra. Heft 3, Teil I, pp. 1—43. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1953, 7.50 DM) (нем.)

Отмечая, что литература по линейной алгебре вплоть до 1932 г. широко освещена в более ранних монографиях, автор сосредоточивает свое внимание в основном на последних работах. Оглавление: А. Модули и векторные пространства. Основные понятия, линейная зависимость, векторные пространства, линейные формы, двойственность в векторных пространствах, линейные уравнения, изменение основного поля, матрицы. Б. Тензорное и внешнее произведения. Тензорное произведение модулей, тензоры, внешнее произведение модулей, определители, двойственность во внешней алгебре. Обзор ясно показывает, что понятие модуля над общим кольцом играет центральную роль в современной линейной алгебре. Заслуживает внимания тот факт, что половина обзора посвящена мультипликативной алгебре. Многократное цитирование в части Б книги Бурбаки (Bourbaki, Algebre multilineaire, Hermann, Paris, 1948) показывает, как велико значение этой книги для отмеченной основной темы. I. Kaplansky

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 497.

6397 К. О решении уравнений высших степеней (метод Штурма). Шафаревич И. Р., Гостехиздат, 1954, 24 стр., 40 коп.

Элементарное изложение метода Штурма отделения вещественных корней алгебраических уравнений, использующее понятие характеристики.

ГРУППЫ

6398. О конечных простых группах. Цубой (On finite simple groups. Tsuboi Teruo), Sci. Rep. Saitama Univ., 1953, **A 2**, 55—57

Пусть G — простая группа и H — ее подгруппа порядка m. Если $(G:H)$ взаимно просто как с m, так и с $\varphi(m)$ (функция Эйлера), то $\sqrt{m}$ является верхней границей порядков элемента центра группы H. Предварительно при некоторых более слабых ограничениях доказывается, что нормализаторы циклических подгрупп группы H совпадают с их централизаторами.

Следствием из доказанной теоремы является теорема С. Чунихина (Math. Ann., 1935, **112**, 95—97): Пусть p — наименьший простой делитель порядка простой группы G и пусть p^a делит, а p^{a+1} не делит этот порядок. Пусть далее P — силовская p-подгруппа группы G. Тогда $\sqrt{p^a}$ есть верхняя граница для порядков элементов центра группы P. F. Haimo

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 196.

6399. Примитивные разрешимые группы подстановок. Хупперт (Primitive, auflösbare Permutationsgruppen. Huppert Bertram), Arch. Math., 1955, 6, № 4, 303—310 (нем.)

В первой части работы для разрешимых групп доказывается предположение Коши (Cauchy A., C. r. Acad. Sci., 1845, 21, 1199—1201), что примитивная группа подстановок степени $p+1$ (p — нечетное простое число) дважды транзитивна (теорема 1). В общем случае вопрос остается открытым. Кроме того, показано (теорема 2), что все только дважды транзитивные разрешимые группы подстановок с примитивной стационарной подгруппой исчерпываются симметрической группой $\mathfrak{S}_3$, группой всех линейных отображений $y=ax+b$, где $a, b \in GF(2^r)$, $a\neq 0$, и группой всех полулинейных отображений $y=ax^{2^t}+b$, где $a, b \in GF(2^r)$, $a\neq 0$ и $0\leqslant t\leqslant r-1$. Здесь r — любое целое число, для которого число 2^r-1 просто. Доказательство этой теоремы опирается на следующую теоретико-числовую лемму: Уравнение $p^\alpha = q^\beta + 1$, где p и q — простые числа, обладает только следующими решениями: 1) $q=2$, $\alpha=1$ и $P=2^\beta+1$; 2) $q=2$, $\beta=3$ и $p=3$, $\alpha=2$; 3) $P=2$, $\beta=1$ и $q=2^\alpha-1$. Из теоремы 2 следует, что симметрические группы $\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{S}_4$ — единственные трижды транзитивные разрешимые группы подстановок и что примитивная разрешимая группа подстановок степени $p+1$, где p — простое число, является либо одной из указанных в теореме 2 групп, либо знакопеременной группой $\mathfrak{A}_4$.

Во второй части доказано, что примитивная разрешимая группа подстановок G степени p^n ($n>1$) не содержит p^n-членных циклов, за исключением случая $p^n=4$, $G=\mathfrak{S}_4$. Кроме того, симметрическая группа $\mathfrak{S}_4$ и знакопеременная группа $\mathfrak{A}_4$ являются единственными примитивными разрешимыми группами подстановок, содержащими регулярную группу диэдра. Н. Ф. Сесекин

6400. Об отличительных признаках соотношений конечных групп. Вефер (Über die Kennzeichnung von Relationen endlicher Gruppen. Wever Franz), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 326—331 (нем.)

Исследуются определяющие соотношения некоторой группы G в связи с группами $U(G)$ и $V(G)$, введенными Нейманом; см. Neuman B. H., Math. Ann., 1924, 91, 506—525; Neumann B. H., Neumann Hanna, Math. Nachr., 1951, 4, 106—125). Доказано, что если группа G порождается k элементами, то группа $U(G)$ порождается матрицей $\mathfrak{A}$ с k строками, столбцы которой являются всевозможными системами образующих группы G, состоящими из k элементов, а группа $V(G)$ порождается матрицей $\mathfrak{B}$ с k строками, столбцы которой являются всевозможными совокупностями по k элементов группы G. (Под группой, порождаемой матрицей с k строками и n столбцами, понимается подгруппа прямого произведения $(G)^n$, порождаемая всеми n-членными «векторами», соответствующими строкам данной матрицы).

Определяющее соотношение группы G называется тождественным, если оно является соотношением для группы $V(G)$, и характеристическим, если оно является соотношением для группы $U(G)$, но не для группы $V(G)$. Доказано, что если группа G порождается k элементами и порядок любого ее элемента делит t, то характеристические соотношения группы G могут быть приведены к виду $u_1^d = f(u_1, \ldots, u_k)$, где $0\leqslant d<t$, а слово $f(u_1, \ldots, u_k)$ содержится в коммутанте свободной группы, порожденной символами $u_1, \ldots, u_k$. На основе этого доказано, что если группа G порождается k элементами и порядок любого элемента фактор-группы группы G по коммутанту делит d, то фактор-группа группы $U(G)$ по коммутанту является прямым произведением k циклических групп порядка d. Наконец, доказано, что для задания конечной группы посредством образующих и соотношений требуется, помимо тождественных соотношений, лишь конечное число нетождественных. Б. К. Туркин

6401. Замечания о проблеме изоморфизма в теориях построения конечных групп. Тонт (Remarks on the isomorphism problem in theories of construction of finite groups. Taunt D. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 1, 16—24 (англ.)

Рассматриваются следующие свойства конечных групп: (М) группа G является p-группой и порядок ее группы автоморфизмов равен

$$p^{d(n-d)}(p^d-1)(p^d-p)\ldots(p^d-p^{d-1}),$$

где p^n — порядок группы G, а d — число элементов минимального базиса группы G (Hall P., Proc. London Math. Soc. (2), 1933, 36, 29—95);

($\mathcal{E}$) любой изоморфизм между двумя фактор-группами группы G порождается некоторым автоморфизмом; ($\mathcal{E}'$) каждый автоморфизм любой фактор-группы группы G порождается некоторым автоморфизмом; ($\mathcal{E}''$) — две фактор-группы группы G изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие нормальные делители переводятся друг в друга некоторым автоморфизмом.

Очевидно, что из свойства $\mathcal{E}$ следует каждое из свойств $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$, а из обоих свойств $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$ следует свойство $\mathcal{E}$. Доказывается, что для абелевых групп свойства $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ эквивалентны. Для абелевых p-групп каждое из них эквивалентно свойству M. Любая p-группа, обладающая свойством M, обладает свойством $\mathcal{E}$.

Эти результаты применяются к исследованию A-групп, т. е. разрешимых групп с абелевыми группами Силова (к этому классу принадлежат, в частности, все разрешимые группы, порядки которых не делятся на куб простого числа). Показано, что A-группы являются полупрямыми расширениями A-групп с меньшей длиной композиционного ряда. В связи с этим выводятся простые практические условия изоморфизма двух полупрямых расширений. Указывается, что с помощью этих условий можно явно перечислить все A-группы данного порядка. Сообщается, что в неопубликованной диссертации автора определены все типы A-групп порядка $2^2 3^2 5^2 = 900$. Всего имеется 150 неизоморфных между собой групп этого порядка, из которых лишь одна не разрешима. В. К. Туркин

6402. Характеристические соотношения для базисов второго порядка симметрической группы. Пикар (Les relations caractéristiques des bases du second ordre du groupe symétrique. Piccard Sophie), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 18, 1751—1754 (франц.)

Как доказал Мур, симметрическая группа s_n порождается двумя элементами a, b, удовлетворяющими при $n\geqslant 4$ соотношениям: 1) $a^n=1$; 2) $b^2=1$; 3) $(ba)^{n-1}=1$; 4) $(baba^{-1})^3=1$; 5) $(ba^i ba^{-i})^2=1$ ($i=2, 3, \ldots, n-2$). Оказывается, что соотношение 4) является следствием соотношений 1), 2), 3), 5). Для $n=3,4,5$ автор указывает некоторые системы независимых соотношений. В. К. Туркин

6403. Теорема двойственности в теории представлений конечных групп как высказывание о групповом кольце. Вольф (Der Dualitätssatz der Darstellungstheorie endlicher Gruppen als Aussage über den Gruppenring. Wolf Paul), Math. Nachr., 1954, 11, № 3, 129—133 (нем.)

Показано, что теорема двойственности в теории представлений конечных групп (Hasse, Math. Nachr., 1949,

3, 1—3) легко выводится из того, что для некоторого элемента $\alpha = \Sigma a_s S$ группового кольца конечной группы $\mathfrak{G}$ равенство $\alpha \times \alpha = \Sigma a_s (S \times S)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathfrak{G}$. Д. К. Фаддеев

6404. О разложении групповых характеров. Секино (Über die Zerlegung der Gruppencharaktere. Sekino Kaoru), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1954, sec. 1, 7, № 2, 255—263 (нем.)

Пусть $\mathfrak{G}$ — конечная группа, $\mathfrak{H}$ — ее нормальный делитель, фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ по которому изоморфна полной линейной группе mod 2^n. Выведены формулы для разложения характеров группы $\mathfrak{G}$ на простые характеры в $\mathfrak{H}$. Аналогичный вопрос для случая, когда фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ изоморфна полной линейной группе mod p^n (p — нечетное простое число), решил ранее Суетуна (Suetuna Z., Japan. J. Math., 1943, 18, 729—744).

В. К. Туркин

6405. О представлениях полупрямого произведения абелевых групп. Берман С. Д., Докл. АН СССР, 95, № 2, 1954, 177—180

Пусть $\mathfrak{G}$ — полупрямое произведение конечных абелевых групп H_1 и H_2 ($G = H_1 H_2$, $H_1 \cap H_2 = 1$, H_1 — нормальный делитель в G) и $R(G, K)$ — групповая алгебра группы G над полем комплексных чисел K, m — порядок группы H_2, M — полная система минимальных идемпотентов алгебры $R(H_1, K)$ и $M' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ — полная система минимальных идемпотентов алгебры $R(H_2, K)$. Каждому элементу b_i группы H_2 соответствует автоморфизм φ_i алгебры $R(H_1, K)$, определяемый формулой $\varphi_i(a) = b_i a b_i^{-1}$ ($a \in R(H_1, K)$). Пусть по отношению к группе всех автоморфизмов φ_i группа H_1 разбивается на области транзитивности $H_1^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, t$), а множество M — на области транзитивности $M^{(j)} = \{e_1^{(j)}, \ldots, e_{\beta_j}^{(j)}\}$ ($j = 1, \ldots, r$). Пусть далее $\tilde{e}_j = \sum_{s=1}^{\beta_j} e_s^{(j)}$, $\tilde{e}_{ij} = \tilde{e}_i e_j$ ($i = 1, \ldots, t$; $j = 1, \ldots, m$), F'_i — подгруппа группы H_2, состоящая из всех элементов группы H_2, которым соответствуют автоморфизмы, оставляющие на месте элемент $e_1^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, t$), $u_1^{(i)}, \ldots, u_{m'}^{(i)}$ — полная система минимальных идемпотентов алгебры $R(F_i'^i, K)$ и $e''_{is} = \tilde{e}_i u_s^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, t$; $s = 1, \ldots, m'_i$). Оказывается, что идемпотенты $\tilde{e}_{ij}$ образуют полную систему минимальных ортогональных идемпотентов алгебры $R(G, K)$, а идемпотенты e''_{is} образуют полную систему минимальных идемпотентов центра алгебры $R(G, K)$. Минимальные идемпотенты $\tilde{e}_{i_1 j_1}$ и $\tilde{e}_{i_2 j_2}$ тогда и только тогда определяют эквивалентные представления группы G, когда $i_1 = i_2$ и на подгруппе F'_{i_1} значения характеров χ'_{i_1} и χ'_{i_2} группы H_2 совпадают.

Пусть α_i — число элементов множества $H_1^{(i)}$. Доказано, что если H_2 — циклическая группа, то числа α_i являются степенями абсолютно неприводимых представлений группы G, причем существует точно m/α_i неприводимых неэквивалентных представлений группы $\mathfrak{G}$ степени α_i. В. К. Туркин

6406. Об абелевых группах, в которых классы изоморфных собственных подгрупп содержат одинаковое число подгрупп. Фукс Л., Чехосл. матем. ж., 1953, 2, № 4, 387—390 (рез. англ.)

Множество всех собственных подгрупп абелевой группы G разбивается на классы попарно изоморфных между собой подгрупп. Доказывается, что если полученные таким образом классы подгрупп группы G состоят из одинакового конечного числа $k > 1$ подгрупп, то группа G является прямой суммой либо двух, либо трех циклических групп одного и того же простого порядка p. Указывается, что случай $k = 1$ был ранее рассмотрен T. Селе (Szele T., Acta math. Acad. sci. hung., 1952, 3).

Доказывается также, что абелевы группы, в которых классы изоморфных между собой собственных циклических подгрупп содержат одно и то же конечное число $k > 1$ подгрупп, исчерпываются прямыми суммами конечного числа циклических групп порядка p.

А. П. Мишина

6407. Эндоморфизмы степенного типа некоторых групп класса 2. Хеймо (Power-type endomorphisms of some class 2 groups. Haimo Franklin), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 2, 201—213 (англ.)

Пусть коммутант Q группы G содержится в центре Z и пусть порядки элементов фактор-группы G/Z ограничены в совокупности числом N. Изучается совокупность $\mathfrak{P}$ всех эндоморфизмов группы G, порождающих в G/Q эндоморфизм $\alpha(\bar{x}) = \bar{x}^{n(\alpha)}$, где $n(\alpha)$ — целое неотрицательное число, одно и то же для всех $\bar{x} \in G/Q$. Рассматриваются следующие подмножества множества $\mathfrak{P}$: множество $\mathfrak{K}$ всех эндоморфизмов $\alpha \in \mathfrak{P}$, ядро которых содержит Q; лежащее в $\mathfrak{K}$ множество $\mathfrak{R}$ всех эндоморфизмов $\alpha \in \mathfrak{P}$, для которых $n(\alpha)$ делится на N; лежащее в $\mathfrak{R}$ множество $\mathfrak{N}$ всех эндоморфизмов α группы G, для которых $\alpha(G) \subseteq Q$. Суммой любых эндоморфизмов группы G называется отображение $(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x)\beta(x)$ ($x \in G$), вообще говоря, не являющееся эндоморфизмом. Доказывается, что если $\alpha \in \mathfrak{P}$, то в том и только в том случае $\alpha + \beta \in \mathfrak{P}$ при любом $\beta \in \mathfrak{P}$, когда $\alpha \in \mathfrak{R}$. Далее доказывается, что $\mathfrak{K}$ совпадает с совокупностью всех эндоморфизмов $\alpha \in \mathfrak{P}$, для которых существует эндоморфизм $\alpha' \in \mathfrak{P}$, удовлетворяющий условию $(\alpha + \alpha')(x) = e$ для любого $x \in G$ (обозначение: $\alpha' = -\alpha$); для $\alpha, \beta \in \mathfrak{P}$ тогда и только тогда $n(\alpha) = n(\beta)$, когда существует такое $\gamma \in \mathfrak{N}$, что $\alpha = \beta + \gamma$; относительно определенного выше сложения и обычного умножения эндоморфизмов $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{N}$ являются кольцами; аддитивная группа кольца $\mathfrak{N}$ изоморфна группе всех автоморфизмов группы G, индуцирующих одновременно в Q и G/Q тождественный автоморфизм; каждое из множеств $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{N}$ обладает тем свойством, что если $\alpha \in \mathfrak{P}$, а $\beta \in \mathfrak{K}$ (соответственно $\beta \in \mathfrak{R}$ или $\beta \in \mathfrak{N}$), то $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ также лежат в $\mathfrak{K}$ (соответственно в $\mathfrak{R}$ или в $\mathfrak{N}$). Если группа G не абелева, а группа G/Q либо не периодическая, либо в ней все элементы имеют один и тот же простой порядок p, то из $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$, $\alpha\beta \in \mathfrak{N}$ вытекает, что либо $\alpha \in \mathfrak{N}$, либо $\beta \in \mathfrak{N}$. Если G не абелева, а G/Q — примарная группа с ограниченными в совокупности порядками элементов, то $\mathfrak{N}$ — примарный идеал кольца $\mathfrak{R}$. Доказываются также еще некоторые другие свойства множеств эндоморфизмов $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{N}$ группы G.

Пусть далее $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathfrak{P}$, $\gamma \in \mathfrak{R}$ и пусть $\gamma(x) = x^{n(\gamma)} q(x; \gamma)$ ($x \in G$, $q \in Q$). Положим

$$\sigma(x) = \prod_{i=1}^{m} x^{n(\gamma)(-1)^{j_i} n(\alpha_i)} (q(x; \gamma))^{(-1)^{j_i} n(\alpha_i)}, \quad x \in G,$$

где $j_i = 0, 1$ ($i = 1, \ldots, m$). Совокупность всех полученных таким образом отображений σ группы G в себя называется правым главным идеалом, порожденным в $\mathfrak{P}$ элементом γ. Доказывается, что правый главный идеал (γ) является кольцом и что $(\gamma) \subseteq \mathfrak{K}$. Устанавливаются некоторые достаточные условия, при которых идеал (γ) является кольцом с единицей.

В конце работы выясняется вопрос о числе различных гомоморфных отображений группы G в ее центр Z,

имеющих вид $x \to x^n$ (n фиксировано). В частности, доказывается, что если G — группа класса 2, а в факторгруппе G/Q порядки элементов ограничены в совокупности числом m, то число гомоморфных отображений группы G в центр Z делит m. А. П. Мишина

6408. О нормальных рядах обобщенной бесконечной симметрической группы. **М а у р е р** (Despre şirurile normale ale grupului simetric infinit generalizat. M a u r e r I.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat. şi fiz., 1955, **7**, № 3, 499—505 (рум.; рез. русс., нем.)

С произвольной группой A сопоставляется группа $S_\infty(A)$, элементами которой являются всевозможные пары (a, π), где a — счетная упорядоченная последовательность элементов из A ($a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, $a_i \in A$), а π — произвольная счетная подстановка. Операция в $S_\infty(A)$ определяется следующим образом: $(a, \pi)(b, \rho) = (ab_\pi, \pi\rho)$, где $ab_\pi = \{a_1 b_{\pi(1)}, a_2 b_{\pi(2)}, \ldots, a_n b_{\pi(n)}, \ldots\}$. Доказано, что:

1. Каждый главный ряд α группы A определяет конечную или бесконечную совокупность главных рядов группы $S_\infty(A)$ в зависимости от того, конечное или бесконечное число членов главного ряда α принадлежит к центру группы A.

2. Каждый композиционный ряд β группы A определяет конечную или бесконечную совокупность композиционных рядов группы $S_\infty(A)$ в зависимости от того, конечно или бесконечно число членов композиционного ряда β, являющихся абелевыми подгруппами группы A. Е. Г. Шульгейфер

6409. Группы, в которых каждая подгруппа является централизатором. **Г а ш ю ц** (Gruppen, deren sämtliche Untergruppen Zentralisatoren sind. G a s c h ü t z W o l f g a n g), Arch. Math., 1954, **6**, № 1, 5—8 (нем.)

Инволютивный антиизоморфизм $A \to A^\eta$ структуры всех подгрупп группы $\mathfrak{G}$ называется центральной инволюцией в группе $\mathfrak{G}$, если

$$1)\ A^\eta \subseteq \mathfrak{Z}(A);\ 2)\ N(A) \subseteq N(A^\eta),$$

где $\mathfrak{Z}(A)$ — централизатор, а $N(A)$ — нормализатор подгруппы A. Если любая подгруппа A группы $\mathfrak{G}$ является централизатором некоторой подгруппы (для этого необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}(A)) = A$), то отображение $A \to \mathfrak{Z}(A)$ является центральной инволюцией. Оказывается, что конечная группа, обладающая центральной инволюцией, является прямым произведением нильпотентных групп или обобщенных групп диэдра взаимно простых порядков. Кроме того, в конечной группе любая подгруппа тогда и только тогда будет централизатором некоторой подгруппы, когда группа $\mathfrak{G}$ является прямым произведением обобщенных групп диэдра взаимно простых порядков. Б. И. Плоткин

6410. Замечания о расщеплениях групп. **А н д р е** (Bemerkungen über Gruppenpartitionen. A n d r é J o h a n n e s), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 3 (нем.)

Множество $\mathfrak{P}$ истинных подгрупп группы G называется базисом расщепления группы G, если каждый отличный от нуля элемент группы G принадлежит одной и только одной группе множества $\mathfrak{P}$ (Конторович П. Г., Матем. сб., 1943, **12(54)**, № 1, 56—70). Исходя из множества $\mathfrak{P}$, автор строит плоскость $j(\mathfrak{P})$, точками которой являются элементы группы G, а прямыми — правые смежные классы $U + g$, где $U \in \mathfrak{P}$, $g \in G$. Формулируются некоторые свойства этой плоскости. В частности, утверждается, что $j(\mathfrak{P})$ тогда и только тогда является аффинной плоскостью, когда из соотношений $U \in \mathfrak{P}$, $v \in \mathfrak{P}$, $U \neq V$ следует, что $G = U + V$. Доказательства отсутствуют. Х. Х. Мухаммеджан

6411. Расщепление некоторых разрешимых групп. **Ш е н к м а н** (The splitting of certain solvable groups. S c h e n k m a n E u g e n e), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 2, 286—290 (англ.)

Пусть $G^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} G^n$, где $G = G^1$ — некоторая группа, а $G^n = [G^{n-1}, G]$. Изучаются конечные группы G, для которых группа G^* абелева. Для таких групп, в частности, доказано существование такой полной подгруппы X, что $X \cap G^* = E$, $G = G^* X$. Показано также, что любые две подгруппы X, обладающие этим свойством, сопряжены (с помощью элемента из G^*). С. П. Азлецкий

6412. Об одном образовании, дуальном подгруппе Фраттини. **И т о** (Über eine zur Frattini-Gruppe duale Bildung. I t ô N o b o r u), Nagoya Math. J., 1955, 9, oct., 123—127 (нем.)

Изучается фактор-группа $G/F^*(G)$ конечной группы G по подгруппе $F^*(G)$, порожденной всеми минимальными подгруппами группы (G). Получены некоторые условия разрешимости этой фактор-группы. Б. И. Плоткин

6413. Нильгруппы. **Б э р** (Nilgruppen. B a e r R e i n h o l d), Math. Z., 1955, **62**, № 4, 402—437 (нем.)

Под нильгруппой автор понимает группу, у которой все циклические подгруппы являются членами конечных нормальных рядов (субинвариантны, в смысле Виланда). Всякая нильгруппа является группой Энгеля (РЖМат, 1954, 1566) или, что то же самое, нильгруппой в смысле референта (РЖМат, 1954, 5458). Более того, всякая нильгруппа локально нильпотентна. С другой стороны, существуют группы с возрастающим центральным рядом, не являющиеся нильгруппами, а также нильгруппы, не обладающие возрастающим центральным рядом.

Произведение инвариантных нильподгрупп любой группы является нильподгруппой. Все субинвариантные циклические подгруппы произвольной группы порождают характеристическую нильподгруппу. Эту подгруппу можно рассматривать как обобщение подгруппы Фиттинга. Группа называется разрешимой (субразрешимой), если всякий ее гомоморфный образ обладает нетривиальным абелевым нормальным делителем (нетривиальной, субинвариантной, абелевой подгруппой). Группа G тогда и только тогда разрешима, когда для любых элементов x_i, $y_i \in G$ из соотношения $x_{i+1} = [x_i(x_i, y_i)]$ следует, что $x_i = 1$ для некоторого i. Любая подгруппа и фактор-группа субразрешимой группы также субразрешима. Любая субразрешимая группа с условием максимальности для абелевых подгрупп удовлетворяет условию максимальности для всех подгрупп (это обобщение известной теоремы А. И. Мальцева), любая субразрешимая группа Энгеля локально нильпотентна.

Группа называется нильпотентной, если любой конечный гомоморфный образ любой ее подгруппы является нильпотентной в обычном смысле группой. Любая группа Энгеля оказывается нильпотентной группой (см. также работу П. Г. Конторовича, Матем. сб., 1951, **28**, 79—88, где ставится вопрос о рассмотрении групп с условием Энгеля).

Кроме изложенных результатов, в работе имеется много важных вспомогательных предложений относительно групп с различными условиями конечности (см. также РЖМат, 1954, 1565, 1566, 5458). Отметим, что многие из результатов работы остаются справедливыми, если рассматривать нормальные ряды произволь-

ной (а не только конечной) длины. Субразрешимые группы являются частным случаем радикальных групп в смысле референта (Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 3). В связи с этим некоторые из приведенных результатов являются частным случаем ранее опубликованных результатов относительно радикальных групп.

Б. И. Плоткин

6414. Бернсайдовские свойства. Бэр (Burnsidesche Eigenchaften. Baer Reinhold), Arch. Math., 1955, 6, № 3, 165—169 (нем.)

Теоретико-групповое свойство $\mathfrak{E}$, от которого требуется, чтобы вместе с группой этим свойством обладал и всякий ее гомоморфный образ, называется бернсайдовским, если любая конечно порожденная периодическая группа со свойством $\mathfrak{E}$ конечна. Вопрос, является ли свойство, что каждый элемент группы удовлетворяет уравнению $x^n = 1$, бернсайдовским, есть иная формулировка проблемы Бернсайда. Доказана теорема: свойство $\mathfrak{E}$ тогда и только тогда является бернсайдовским, когда: а) конечно порожденная периодическая группа со свойством $\mathfrak{E}$ обладает лишь конечным числом неизоморфных фактор-групп, б) конечно порожденная периодическая группа со свойством $\mathfrak{E}$, обладающая конечным композиционным рядом, конечна. Группа G называется $\mathfrak{E}'$-группой, если любой нетривиальный гомоморфный образ группы G содержит хотя бы одну нетривиальную $\mathfrak{E}$-подгруппу, являющуюся членом конечного нормального ряда. Доказана теорема: если свойство $\mathfrak{E}$ — бернсайдовское, то бернсайдовским является и свойство $\mathfrak{E}'$.

А. И. Кострикин

6415. Одновременное распространение частичных эндоморфизмов групп. Чехата (Simultaneous extension of partial endomorphisms of groups. Chehata C. G.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1954, **2**, 37—46 (англ.)

Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы вполне упорядоченное множество частичных эндоморфизмов группы G можно было распространить до множества эндоморфизмов некоторого расширения G^* группы G. В частности, это всегда возможно, если G — абелева группа, причем расширение G^* в этом случае также может быть выбрано абелевым. Статья является продолжением работы Б. Неймана и Г. Неймана (Proc. London Math. Soc., 1952, **2**, № 3, 337—348).

F. Haimo

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 10.

6416. О некоторых унитарных представлениях полупростых групп Ли. Брюа (Sur certaines représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples. Bruhat F.), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 23, 2196—2198 (франц.)

Применяя разработанные им методы доказательств неприводимости представлений (РЖМат, 1955, 3637 и 3639), автор устанавливает неприводимость некоторого класса унитарных индуцированных представлений полупростых групп Ли. В частности, доказана неприводимость «почти всех» представлений, рассмотренных Хариш-Чандра (РЖМат, 1956, 614), неприводимость которых в работе Хариш-Чандра не была доказана.

М. И. Граев

6417. Изоморфизмы проективных унитарных групп. Уолтер (Isomorphisms between projective unitary groups. Walter John H.), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 4, 805—844 (англ.)

Пусть K — тело, характеристика которого отлична от двух и которое не совпадает с полем $GF(3)$, и пусть в теле K определен инволюционный антиавтоморфизм*.

Пусть далее E — правостороннее n-мерное векторное пространство над телом K. Функция $f(x, y)$, отображающая $E \times E$ в K, называется билинейной формой, если она линейна относительно каждого из переменных и удовлетворяет соотношению $f(x\alpha, y\beta) = \alpha^* f(x, y)\beta$, где $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in K$. Рассматриваются только такие билинейные формы, что $f(x, y) = [f(y, x)]^*$ и для которых равенство $f(x, y) = 0$ для всех y имеет место только тогда, когда $x = 0$. Относительно билинейной формы f определяется понятие сопряженности линейных преобразований пространства E. Унитарная группа U определяется как группа таких линейных преобразований t, что $f(x, y) = f(x^t, y^t)$. Фактор-группа $P = U/H$, где H — подгруппа группы U, состоящая из преобразований $x \to x\lambda$, $\lambda \in K$, называется проективной унитарной группой. Пусть J — множество всех инволюций из P. Инволюция $u \in J$ называется экстремальной, если в ее полном прообразе при естественном гомоморфизме U на P содержится преобразование $\bar{u}$, для которого хотя бы одно из подпространств $E^+ = \{x, x\bar{u} = x\}$ и $E^- = \{x, x\bar{u} = -x\}$ одномерно. Как известно (Diedonné J., On the automorphisme of the classical groups, 1950; Rickart C., Bull. Amer. Math. Soc., 1951, 57, 435—448), для описания группы P достаточно охарактеризовать ее экстремальные инволюции. Этой задаче и посвящена рассматриваемая работа.

Пространство E называется соизмеримым (commensurable), если для любых его двух неизотропных (определение неизотропности обычное) одномерных подпространств X и Y существует унитарное преобразование пространства E, отображающее X на Y.

Для любого подмножества $\mathfrak{S} \subset J$ через $c(\mathfrak{S})$ обозначается множество элементов из J, коммутирующих со всеми элементами из $\mathfrak{S}$; через $\nu(u, v)$ обозначается число элементов в $c(c(u, v))$; через $\omega(u, v, w)$ — число элементов в $c(c(u, v, w))$; через $\nu(u)$ — максимум $\nu(u, v)$ для всех инволюций v, для которых $u \neq v$ и $uv = vu$; через $\omega(u)$ — максимум $\omega(u, v, w)$ для всех инволюций v, w, для которых $uv \neq w$, где u, v, w — все различны и взаимно коммутируют; через $\mathfrak{T}$ обозначается множество инволюций u, для которых $\nu(u) = 4$; через $\mathfrak{G}$ — множество инволюций u, для которых $\omega(u) = 8$; через $\mathfrak{K}$ — любая совокупность таких элементов $x \in \mathfrak{T}$, что x не сопряжено с xuv, где u и v — инволюции, для которых x сопряжено с u и v, и $uv = vu$, $ux = xu$, $vx = xv$; через $\mathfrak{M}(u)$ — максимальное множество взаимно коммутирующих инволюций из $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{K}$, содержащее инволюцию u; через $\mathfrak{N}(u)$ — максимальное множество взаимно коммутирующих сопряженных элементов, содержащее инволюцию u; через $\pi(u)$ — максимум числа инволюций, лежащих в различных $\mathfrak{N}(u)$; через $\mathfrak{B}$ — множество экстремальных инволюций.

Основной результат содержится в следующих двух теоремах:

Теорема 5.4. Пусть $\dim E > 4$, причем при $\dim E = 6$ пространство E не соизмеримо. Тогда $\mathfrak{B}$ состоит из всех элементов u, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $u \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{K}$; 2) $\mathfrak{M}(u)$ содержит точно n элементов; 3) произведение любых двух или трех элементов из $\mathfrak{M}(u)$ не лежит в $\mathfrak{T}$.

Теорема 5.6. Пусть $\dim E = 6$ и E — соизмеримо. Тогда $\mathfrak{B}$ состоит из всех таких инволюций u, что: 1) $\pi(u) = 6$; 2) произведение u с любыми двумя инволюциями из любого $\mathfrak{N}(u)$ не сопряжено с u; 3) любое произведение k различных инволюций из $\mathfrak{N}(u)$ сопряжено с любым другим произведением k различных инволюций из $\mathfrak{N}(u)$; 4) произведение всех инволюций из $\mathfrak{N}(u)$ равно единице; 5) для любых трех инволюций u, v, w из $\mathfrak{N}(u)$ справедливо соотношение $\omega(u, v, w) = 8$.

Отметим еще следующий результат:

Теорема 2.1. Если $\dim E > 3$ и $u \in \mathfrak{B}$, то $\nu(u) = 4$.

Л. А. Скорняков

6418. Симплектическая группа и ее представления. Валбрук (Le groupe symplectique et ses représentations. Waelbroeck L.), Bull. Soc. math. Belgique, 1953 (1954), **6**, 47—52 (франц.)

Рассматривается симплектическая группа, действующая в пространстве над произвольным полем нулевой характеристики. Приводится рациональная параметризация этой группы. Дается разложение тензорного пространства в прямую сумму симплектически инвариантных неприводимых подпространств. На стр. 48 опечатка: должно быть $Z = CA^{-1}$, $Z' = A^{-1}B$.

Д. А. Супруненко

6419. Локально нильпотентные локально бикомпактные группы. Глушков В. М., Тр. Моск. матем. о-ва, 1955, 4, 291—332

Работа посвящена теории локально нильпотентных (л. н.) и локально бикомпактных (л. б.) групп, в которой до сих пор имелись лишь отдельные результаты. Значительная часть работы посвящена переносу на л. б. группы теорем С. Н. Черникова, А. Г. Куроша и А. И. Мальцева для абстрактных л. н. групп.

Из многочисленных результатов статьи в качестве типичных приведем следующие. В топологической л. н. л. б. группе множество всех бикомпактных элементов (т. е. элементов, для которых замыкание соответствующей циклической подгруппы бикомпактно) является замкнутой характеристической подгруппой. Любая связная л. б. л. н. группа G нильпотентна. Подгруппа H всех ее бикомпактных элементов связна, бикомпактна и содержится в центре группы G, а фактор-группа G/H является связной односвязной нильпотентной группой Ли. Чистая (т. е. не имеющая бикомпактных элементов) связная л. б. л. н. группа является односвязной нильпотентной группой Ли.

Строение общих, не обязательно связных, л. б. л. н. групп описывается следующей основной теоремой: Пусть K — связная компонента единицы л. б. л. н. группы G, а A — подгруппа всех ее бикомпактных элементов. Тогда нормальный делитель $N = KA$ открыт, а фактор-группа G/N является дискретной л. н. группой без кручения; всякий открытый нормальный делитель $N_1 \subset G$, фактор-группа по которому не имеет кручения, содержит N; группа N изоморфна фактор-группе $(L \times B)/C$, где L — связная односвязная нильпотентная группа Ли, $B \cong A$, а C — замкнутая центральная подгруппа прямого произведения $(L \times B)$, для которой $C \cap B = \{e\}$, а $C \cap L$ дискретно. Отсюда, в частности, следует, что фактор-группа л. б. л. н. группы по подгруппе всех ее бикомпактных элементов является чистой л. н. группой Ли. Далее показывается, что в возрастающий центральный ряд л. б. бикомпактно порождаемой (т. е. в алгебраическом смысле порождаемой некоторым бикомпактным множеством) группы стабилизируется на ω-м члене. Отсюда, в частности, следует, что л. б. бикомпактно порождаемая (б. п.) группа G, обладающая возрастающим центральным рядом, включающим G, нильпотентна. Кроме того, л. н. л. б. б. п. группа тогда и только тогда нильпотентна, когда нильпотентна ее максимальная бикомпактная подгруппа.

Работа содержит также ряд других результатов, подробно выясняющих строение л. н. б. п. групп, а также периодических л. н. л. б. групп. А. И. Мальцев

6420. Максимальные подгруппы полугруппы. Кимура (Maximal subgroups of a semigroup. Kimura Naoki), Kōdai Math. Sem. Repts, 1954, № 3, 85—88 (англ.)

Пусть u — идемпотентный элемент полугруппы M, а N — совокупность всех таких элементов $a \in M$, что $au = ua = a$, для которых существует такой элемент a', что $aa' = a'a = u$. Доказывается, что N есть наибольшая из подгрупп полугруппы M, имеющих единицей идемпотент u. В частном случае, когда u есть единица M, N является совокупностью таких a, что $aM = Ma = M$.

Е. С. Ляпин

6421. Простые обратимые слева полугруппы. Круазо (Demi-groupes simples inversifs à gauche. Croisot Robert), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 15, 845—847 (франц.)

Полугруппа D тогда и только тогда является объединением своих минимальных левых идеалов, когда $a \in Dba$, для любых $ab \in D$. Полугруппа D тогда и только тогда проста, когда $a \in DbD$, для любых $a, b \in D$. Полугруппа D тогда и только тогда обратима слева, когда $a \in Da^2$, для любого $a \in D$.

Простая полугруппа D тогда и только тогда обратима слева, когда в D существует хотя бы один минимальный левый идеал.

Простая обратимая слева полугруппа без идемпотентных элементов представима в виде некоторой полугруппы отображений множества в себя.

П. Г. Конторович

6422. К теории эквивалентностей в полугруппах. Тьеррен (Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes. Thierrin Gabriel), Bull. Soc. math. France, 1955, **83**, № 2, 103—159 (франц.)

Следуя работам Дюбрея (Dubreil P., Mémoires Acad. Sci. Inst. France, 1941, **63**, 1—52; РЖМат, 1955, 4908), автор исследует различные типы эквивалентностей в полугруппах в их отношении к гомоморфизмам полугрупп. Работа содержит много результатов (87 теорем), относящихся как к ранее введенным понятиям, так и к некоторым новым, впервые появляющимся здесь.

В гл. 1 рассматриваются эквивалентности в гомогруппах (РЖМат, 1953, 117), в гл. 2 обобщенные обратимые эквивалентности в общих полугруппах и в гл. 3 регулярные эквивалентности. Рассмотрены новые типы эквивалентностей, которые при определенных условиях переходят в эквивалентности, определенные Дюбреем. В терминах эквивалентностей характеризуются полугруппы, являющиеся группами.

Некоторые результаты этой работы были опубликованы автором ранее (C. r. Acad. sci., 1952, 234, 1519—1521, 1595—1597; РЖМат, 1953, 118, 619; 1954, 2044). Š. Schwarz

6423. Инверсные и прямоугольные полугруппы. Тьеррен (Demi-groupes inversés et rectangulaires. Thierrin Gabriel), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 2, 83—92 (франц.)

Полугруппа D называется стационарной справа (слева), если из равенства $x_1a = x_1b$ ($ax_1 = bx_1$) следует, что $xa = xb$ ($ax = bx$) для любого $x \in D$; прямоугольной, если из равенств $ax = bx = ax' = m$ следует, что $bx' = m$; инверсной, если для любого элемента $x \in D$ существует такой элемент $x' \in D$, что элементы xx' и $x'x$ являются идемпотентами. Оказывается, что множество E идемпотентных элементов прямоугольной полугруппы D, если оно не пусто, является полугруппой и $xe_iy = xy$, при любых $e_i \in E$; $x, y \in D$. Из равенства $e_ie_j = e_je_i$ следует, что $e_i = e_j$. Любая инверсная прямоугольная полугруппа стационарна слева и справа. Инверсная полугруппа тогда и только тогда прямоугольна, когда $xey = xy$ для любого идемпотента e. Прямоугольная полугруппа, являющаяся объединением групп, проста. Для любой инверсной, прямоугольной и абелевой полугруппы D полугруппа D^2 является группой. В инверсной прямоугольной полугруппе нет собственных простых идеалов. Полугруппа D тогда и только тогда инверсна и прямоугольна, когда любая ее эквивалентность, регулярная справа, стационарна слева (эквивалентность R в полугруппе R называется стационарной слева, если из $ax_1 \equiv bx_1 (R)$ следует, что $ax \equiv bx (R)$ для любого $x \in D$), а любая ее эквивалентность, регулярная слева, стационарна справа.

П. Г. Конторович

6424. О некоторых примерах полугрупп. Кимура (On some examples of semigroups. Kimura Nao-

k i), Kodai Math. Sem. Repts, 1954, № 3, 89—92 (англ.)

Построены примеры полугрупп, не являющихся группами, в которых деление справа всегда возможно (но не однозначно), а деление слева однозначно (но не всегда возможно). Е. С. Ляпин

6425. Замечания об унипотентных обратимых полугруппах. Тамура (Note on unipotent inversible semigroups. Tamura Takayuki), Kodai Math. Sem. Repts, 1954, № 3, 93—95 (англ.)

Доказано, что в полугруппе S с единственным идемпотентным элементом e следующие четыре условия равносильны: 1) уравнение $ax = e$ разрешимо в S при любом $a \in S$; 2) уравнение $xa = e$ разрешимо в S при любом $a \in S$; 3) eS — группа, 4) Se — группа. Для полугруппы S с этими свойствами доказывается, что 1) $ea = ae$ для любого $a \in S$, 2) $G = eS = Se$ является идеалом, 3) идеал G является наибольшей группой в S. Пусть Z — полугруппа, получаемая из S отождествлением между собою всех элементов G. Определяется некоторый гомоморфизм f полугруппы S в G и доказывается, что задание G, Z и f вполне определяет полугруппу S. Рассматривается вопрос об изоморфизме двух полугрупп, заданных таким способом. Е. С. Ляпин

6426. О замкнутых конгруэнциях на квазигруппе. Шик (Über abgeschlossene Kongruenzen auf Quasigruppen. Šik František), Spisy vyd. přírodověde fakult. Masarykovy univ., 1954, № 3, 103—112 (нем.; рез. русс.)

Отношение эквивалентности τ на квазигруппе G называется допустимым относительно подстановки α множества G, если из $a\tau b$ следует, что $a\alpha\tau b\alpha$ для любых элементов a, $b \in G$. Отношение τ называется разложением в системы транзитивности группы Γ, где Γ — некоторая группа подстановок на G, если $a\tau b$ тогда и только тогда, когда существует такая подстановка $\alpha \in \Gamma$, что $a\alpha = b$. В этом случае Γ называется инертной группой разложения τ, а отношение τ — замкнутой конгруэнтностью.

Конгруэнтность τ на G называется субнормальной, если из того, что $ax\tau bx$ при всех $x \in G$ $(a, b \in G)$, а также из того, что $xa\tau xb$, следует, что $a\tau b$; локально нормальной, если из существования элемента $x_0 \in G$, для которого $ax_0\tau bx_0$ или $x_0a\tau x_0b_0$ $(a, b \in G)$, следует, что $a\tau b$, и наследственно субнормальной, если всякая конгруэнтность на G, меньшая чем τ, субнормальна. Элемент x называется единицей, если существуют такие элементы a, $b \in G$, что $ax = a$ и $xb = b$.

Доказаны следующие теоремы: 1) если отношение конгруэнтности на G наследственно субнормально или локально нормально, то оно замкнуто в G_r, где G_r — группа подстановок, порожденная всеми левыми и правыми сдвигами; 2) отношение конгруэнтности на лупе или квазигруппе G, центр которой содержит все ее единицы, замкнуто в G_r; 3) отношение конгруэнтности на G нормально тогда и только тогда, когда оно является разложением в системы транзитивности некоторого нормального делителя в G_r; 4) нормальное отношение конгруэнтности перестановочно с любым наследственно субнормальным или локально нормальным отношением конгруэнтности; 5) любое нормальное отношение конгруэнтности перестановочно с любым отношением конгруэнтности на лупе или квазигруппе, центр которой содержит все ее единицы. Некоторые из сформулированных теорем доказаны и для односторонних модификаций рассматриваемых понятий.

Ю. И. Соркин

6427 К. Гомологическая алгебра. Картан, Эйленберг (Homological algebra. Cartan H., Eilenberg S.), Princeton Univ. Press, 1956 (англ.)

Основная цель рассматриваемой книги — изложить общую теорию, охватывающую, как частные случаи, теорию групп гомологий абстрактных групп, алгебр Ли и ассоциативных алгебр. Книга состоит из 17 глав и приложения: I. Кольца и модули. II. Аддитивные функторы. III. Сателлиты. IV. Гомологии. V. Производные функторы. VI. Производные функторы от $\otimes$ и Hom. VII. Области целостности. VIII. Кольца с пополнением. IX. Ассоциативные алгебры. X. Алгебры с дополнением. XI. Произведения. XII. Конечные группы. XIII. Алгебры Ли. XIV. Расширения. XV. Спектральные последовательности. XVI. Приложения спектральных последовательностей. XVII. Гипергомологии. Приложение (написанное Буксбаумом). Точные категории. Каждая глава снабжена упражнениями (являющимися часто важными теоремами).

В гл. I излагаются основные необходимые сведения из теории колец и модулей. В целях наиболее выпуклого изложения соотношений двойственности наряду с ядром $\operatorname{Ker} f$ и образом $\operatorname{Im} f$ некоторого гомоморфизма f: $A \to B$ вводятся коядро $\operatorname{Coker} f = B/\operatorname{Im} f$ и кообраз $\operatorname{Coim} f = A/\operatorname{Ker} f$. Подробно рассматриваются проективные модули (модуль P называется проективным, если любой гомоморфизм модуля P в некоторый фактормодуль B/B' может быть представлен как сквозной гомоморфизм $P \to B \to B/B'$) и инъективные модули (модуль Q называется инъективным, если для любого модуля A и любого его подмодуля A' любой гомоморфизм $A' \to Q$ может быть продолжен до гомоморфизма $A \to Q$). Основной результат: любой модуль является фактормодулем некоторого проективного модуля и подмодулем некоторого инъективного. Доказательство последнего утверждения, следующее идеям Бера, по мнению референта, излишне громоздко. Существует более простое доказательство Экмана-Шопфа (РЖМат, 1954, 2870). Изучены полупростые слева кольца (прямые суммы колец, не имеющих нетривиальных левых идеалов), наследственные слева кольца (кольца, любой левый идеал которых является проективным модулем), нетеровы кольца и др.

В гл. II рассматриваются аддитивные (т. е. удовлетворяющие соотношению $T(\varphi + \psi) = T(\varphi) + T(\psi)$) и точные (т. е. перерабатывающие любую точную последовательность модулей в точную) функторы (во всей книге рассматриваются, как правило, лишь функторы, определенные на категории модулей и принимающие значения в той же категории; для простоты в реферате все функторы будут предполагаться ковариантными). Отмечено, что функтор T тогда и только тогда точен, когда для любой точной последовательности вида $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ последовательность

$$0 \to T(A') \to T(A) \to T(A'') \to 0 \qquad (1)$$

точна. Кроме точных функторов вводятся также полуточные функторы (для которых последовательность (1) точна лишь в членах $T(A')$ и $T(A)$). Подробно рассмотрены основные функторы Hom (модуль гомоморфизмов) и $\otimes$ (тензорное произведение). Эти функторы аддитивны и полуточны, причем первый точен слева, а второй — справа. Доказаны классические соотношения ассоциативности для операций Hom и $\otimes$. Эти соотношения применены к исследованию φ-расширений модулей (если $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ — некоторый гомоморфизм колец, то кольцо Γ естественным образом определяется как Λ-модуль и, следовательно, для любого правого Λ-модуля A определен правый Γ-модуль $A_{(\varphi)} = A \otimes_{\Lambda} \Gamma$ — ковариантное φ-расширение модуля A и правый Γ-модуль $A^{(\varphi)} = \operatorname{Hom}_{\Lambda}(\Gamma, A)$ — контравариантное φ-расширение модуля A).

В гл. III рассматривается основное для всей книги понятие сателлита функтора. Пусть T — некоторый функтор и A — произвольный модуль. Пусть имеют место точные последовательности

$$0 \to M \xrightarrow{\varphi} P \to A \to 0,\ 0 \to A \to Q \xrightarrow{\psi} N \to 0, \qquad (2)$$

в которых модуль P проективен, а модуль Q инъективен. Положим $S_1T(A) = \operatorname{Ker} T(\varphi)$, $S^1T(A) = \operatorname{Coker} T(\psi)$. Оказывается, что модули $S_1T(A)$ и $S^1T(A)$ не зависят от выбора последовательностей (2) и соответствия $A \to S_1T(A)$ и $A \to S^1T(A)$ определяют некоторые функторы S_1T и S^1T. Эти функторы называются соответственно левым и правым сателлитами данного функтора T. Далее определяются повторные сателлиты: $S_{n+1}T = S_1(S_nT)$ и $S^{n+1}T = S^1(S^nT)$. Удобно положить $S_0T = S^0T = T$ и $S_nT = S^{-n}T$. Значение сателлитов определяется следующей основной теоремой: для любой точной последовательности вида $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ и любого полуточного функтора T имеет место точная последовательность

$$\ldots \to S^{n-1}T(A'') \to S^nT(A') \to S^nT(A) \to$$
$$\to S^nT(A'') \to S^{n+1}T(A') \to \ldots$$

Дано также аксиоматическое определение сателлитов. Рассмотрены сателлиты многоместных функторов.

В гл. IV строятся модули гомологий модулей с дифференциалом. Кроме обычного определения модуля гомологий $H(A)$ (т. е. $H(A) = \operatorname{Ker} d/\operatorname{Im} d$) рассматривается также двойственное определение: $H(A) = \operatorname{Ker} \tilde{d}$, где $\tilde{d}$: $\operatorname{Coker} d \to \operatorname{Ker} d$ — индуцированное дифференциалом d отображение. Известная теорема о точной последовательности гомологий выражается на языке теории сателлитов в виде равенства $S^nH = H$, справедливого для всех n. Специально рассматривается случай градуированных и дважды градуированных модулей. Комплексы определяются как градуированные модули с дифференциалом, имеющим степень 1. Аналогично двойной комплекс определяется как дважды градуированный модуль с двумя антикоммутирующими дифференциалами d_1, d_2 степеней (1,0) и (0,1) соответственно. Любой двойной комплекс является одинарным комплексом относительно дифференциала $d_1 + d_2$. Указываются возможные обобщения (n-кратные комплексы). В заключение этой главы в весьма общей ситуации доказываются соотношения Кюннета.

Пусть T — двуместный ковариантный функтор. Тогда для любых двух комплексов A и C модуль $T(A, C)$ является двойным комплексом, так что определен модуль гомологий $H(T(A, C))$. С другой стороны, определен модуль $T(H(A), H(C))$. Оказывается, что если функтор T точен справа, то естественным образом определяется некоторый гомоморфизм $\alpha: T(H(A), H(C)) \to H(T(A, C))$, являющийся изоморфизмом, если функтор T точен. Обобщенная теорема Кюннета утверждает, что если гомоморфизмы α_1: $T(H(A), B(C)) \to H(T(A, B(C)))$, $\alpha_2: T(H(A), Z(C)) \to H(T(A, Z(C)))$ являются изоморфизмами и $S_1T(A, B(C)) = S_1T(H(A), Z(C)) = 0$ (сателлиты берутся по второму аргументу), то имеет место точная последовательность

$$0 \to T(H(A), H(C)) \to H(T(A, C)) \to$$
$$\to S_1T(H(A), H(C)) \to 0.$$

В гл. V определяется центральное понятие книги — понятие производного функтора. В первую очередь доказывается, что для любого модуля A существует проективная резольвента, т. е. точная последовательность $\ldots \to X_n \to X_{n-1} \to \ldots \to X_0 \to A \to 0$, в которой все модули X_n проективны. Любые две резольвенты имеют один и тот же гомотопический тип (в понятном смысле). Аналогично для любого модуля A существует (также единственная с точностью до гомотопического типа) инъективная резольвента, т. е. точная последовательность $0 \to A \to X^0 \to \ldots \to X^{n-1} \to X^n \to 0$, в которой все модули X^n инъективны.

Пусть теперь $T(A, C)$ — некоторый аддитивный функтор, ковариантный по A и контравариантный по C, и пусть X — инъективная, а Y — проективная резольвента модулей A и C соответственно. Тогда естественным образом определяется двойной комплекс $T(X, Y)$. Оказывается, что его n-ный ($n = 0,1,\ldots$) модуль гомологий $H^n(T(X, Y))$ не зависит от выбора резольвент X и Y и является объектной частью некоторого функтора R^nT. Этот функтор называется n-ым правым производным функтором от функтора T. Если в этом определении за X принять проективную, а за Y — инъективную резольвенты, то мы получим n-ые левые производные функторы L_nT. Если функтор T точен справа (слева), то функтор L_0T (функтор R^0T) естественно изоморфен функтору T. Точный слева (справа) функтор T тогда и только тогда точен, когда $R^1T = 0$ (соответственно когда $L_1T = 0$). Если одноместный функтор T точен справа (слева), то функторы L_nT и S_nT (соответственно функторы R^nT и S^nT) естественно изоморфны. Все правые (левые) производные функторы от функтора, являющегося правым (левым) сателлитом, равны нулю. Для многоместных функторов можно рассматривать частичные производные функторы, получающиеся, когда мы некоторые из аргументов не используем при построении производных функторов (эти аргументы называются пассивными, а остальные активными). Функтор T называется справа (слева) сбалансированным, если при замене любого его ковариантного аргумента инъективным (проективным) модулем, а также при замене любого его контравариантного аргумента проективным (инъективным) модулем функтор превращается в точный. Для справа (слева) сбалансированных функторов частичные правые (левые) производные функторы естественно отождествляются с полными производными функторами. В этой же главе рассматривается поведение функторов $\otimes$, Hom и H относительно операций прямого суммирования и перехода к пределу по спектру модулей.

В гл. VI изучаются левые производные функторы Tor_n от функтора $\otimes$ и правые производные функторы Ext^n от функтора Hom. Указываются индуктивные формулы для вычисления этих функторов. Например, если имеют место точные последовательности $0 \to M \to P \to A \to 0$, $0 \to M' \to P' \to C \to 0$, $0 \to C \to Q \to N \to 0$, где модули P, P' проективны, а модуль Q инъективен, то $\operatorname{Ext}^n(A, C) \approx \operatorname{Ext}^{n-2}(M, N)$, $\operatorname{Tor}_n(A, C) \approx \operatorname{Tor}_{n-2}(M, M')$ ($n > 2$). Если левый модуль A обладает проективной резольвентой, для которой $X_n \neq 0$, и $X_k = 0$ для $k > n$, то говорят, что проективная размерность модуля A равна n. Проективная размерность обозначается через $\operatorname{l.dim} A$ или просто через $\dim A$. Аналогично определяется инъективная размерность. Рассмотрены соотношения между размерностями модулей и функторами Ext и Tor. Например, $\dim A \leqslant n$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ext}^{n+1}(A, C) = 0$ для любого модуля C. Если $\operatorname{Ext}^{n+1}(A, C) = 0$ для любых (левых) модулей A и C и существуют такие модули A и C, что $\operatorname{Ext}^n(A, C) \neq 0$, то n называется

(левой) глобальной размерностью кольца операторов Λ и обозначается через l. gl. dim Λ. Аналогично определяется правая глобальная размерность r. gl. dim Λ. Условие l. gl. dim $\Lambda = 0$ характеризует полупростые кольца, а условие l. gl. dim $\Lambda \leqslant 1$ — наследственные. Далее в этой главе доказываются формулы Кюннета (для групп гомологий и когомологий), из которых в качестве частного случая выводится формула универсальных коэффициентов. Изучена связь между функторами Tor_n, Ext^n и φ-расширениями модулей. В заключение главы рассматриваются составные функторы (например, вида Hom (Ext $(A, B), C)$ и т. п.).

В гл. VII рассматривается случай, когда кольцо операторов Λ является областью целостности. Доказано, что если кольцо Λ прюферово (т. е. является областью целостности, любой идеал которой, имеющий конечный базис, проективен), то $\mathrm{Tor}_n = 0$, если $n > 1$, а модуль $\mathrm{Tor}_1 (A, C)$ периодичен и зависит только от максимальных периодических подмодулей модулей A и C соответственно. Если кольцо Λ дедекиндово (т. е. является нетеровским и одновременно прюферовским кольцом), то для любого функтора T функторы $R^n T$, $L_n T$, $S^n T$ и $S_n T$ тривиальны для всех $n > 1$. В заключение рассмотрены абелевы группы (т. е. случай $\Lambda = Z$) и, в частности, с помощью теории характеров установлена связь между функторами Tor_1 и Hom.

В гл. VIII рассматриваются кольца с пополнением, т. е. кольца Λ, рассматриваемые вместе с некоторым Λ-модулем Q и Λ-эпиморфизмом $\varepsilon : \Lambda \to Q$. К классу колец с пополнением принадлежат градуированные кольца (в частности, кольца многочленов), локальные кольца и кольца полугрупп. Пусть $(\Lambda, Q, \varepsilon)$ — произвольное кольцо с пополнением. Для любого правого Λ-модуля A положим $T(A) = A \otimes Q$; аналогично для любого левого Λ-модуля положим $U(C) = \mathrm{Hom}_\Lambda (Q, C)$. Тогда определены группы $\mathrm{Tor}_n (A, Q) = S_n T (A)$ (соответственно $\mathrm{Ext}^n (Q, C) = S^n U (C)$), называемые группами гомологий (когомологий) кольца Λ с коэффициентами в A (соответственно в C). Изложен метод вычисления этих групп с помощью проективных резольвент, дано их аксиоматическое описание, изучено их поведение при изменении кольца Λ и т. п. Доказана теорема о размерности модуля Q, из которой, в частности, вытекает следующий результат: Пусть Λ — кольцо многочленов (или степенных рядов) от n неизвестных над произвольным кольцом K. Тогда l $\dim_\Lambda K = n$. Получены и другие результаты о размерностях. Частным случаем одного из этих результатов является теорема Гильберта о цепях сизигий.

В гл. IX рассматриваются алгебры Λ (над коммутативным кольцом K). В начале главы изучается тензорное произведение алгебр и некоторые связанные с ним функторы. Далее рассматривается обертывающая алгебра $\Lambda^e = \Lambda \otimes \Lambda^*$, где Λ^* — алгебра, антиизоморфная алгебре Λ. Эта алгебра является алгеброй с пополнением (соответствующий модуль Q совпадает с Λ, а эпиморфизм $\varepsilon : \Lambda^e \to \Lambda$ определяется формулой $\varepsilon (\lambda \otimes \mu^*) = \lambda\mu$). Группы гомологий (когомологий) этой алгебры с пополнением называются группами гомологий (когомологий) данной алгебры Λ. Излагается метод вычисления этих групп и изучаются их свойства. Специализируя проективные резольвенты, необходимые для вычисления групп гомологий, авторы возвращаются к конструкции Хохшильда (в предположении, что рассматриваемые алгебры K-проективны). В заключение доказаны некоторые теоремы о размерности алгебр т. е. их проективной размерности как правых Λ^e-модулей). Например, размерность полной матричной алгебры равна нулю. Если кольцо K полупросто, то $\dim \Lambda = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Λ^e полупроста. Если K — поле, а алгебра Λ конечного ранга, то $\dim \Lambda = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Λ сепарабельна.

В гл. X рассматриваются алгебры с дополнением, т. е. K-алгебры с пополнением, для которых $Q = K$, а ε является мультипликативным гомоморфизмом. Важнейшими частными случаями таких алгебр являются алгебры полугрупп (в частности, групп) и алгебры Ли. Таким образом теория гомологий алгебр с дополнением охватывает как теорию гомологий групп, так и теорию гомологий алгебр Ли.

В гл. XI изучаются некоторые произведения, формально аналогичные известным произведениям в алгебраической топологии.

В гл. XII изучаются конечные группы. Оказывается, что для конечной группы целесообразно группы гомологий и когомологий объединить в одну последовательность. Эта последовательность подробно изучена (также и с мультипликативной точки зрения). Рассмотрены примеры, группы гомологий подгрупп, в частности силовских подгрупп, и другие аналогичные вопросы.

В гл. XIII рассматриваются алгебры Ли аналогично тому, как в гл. IX были изучены ассоциативные алгебры.

В гл. XIV рассматривается связь гомологических теорий с теорией расширений.

В гл. XV развивается алгебраическая теория спектральных последовательностей. Излагаются некоторые обобщения и приложения к теории двойных комплексов.

В гл. XVI спектральные последовательности применяются к изучению многоместных функторов, в частности существенно дополняются результаты гл. V, касающиеся частичных производных функторов. В этой главе построено много интересных спектральных последовательностей, как, например, последовательность Картана — Лере. Приведены некоторые топологические приложения (в частности, получены классические результаты о влиянии фундаментальной группы на группы гомологий). Отметим также результат о сведении «почти всюду равной нулю» теории гомологий групп к обычной теории гомологий.

В гл. XVII рассматриваются резольвенты комплексов. Построенные в связи с этим спектральные последовательности можно рассматривать как весьма далеко идущее обобщение соотношений Кюннета.

В приложении изложен краткий очерк теории сателлитов и связанных с ними понятий в некоторых абстрактных категориях. М. М. Постников

6428 К. **Представления групп с учетом потребностей современной физики. Бернер** (Darstellungen von Gruppen. Mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik. Boerner Hermann. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1955, XI, 287 S., 36.60 DM) (нем.)

Книга посвящена теории конечномерных представлений (над полем комплексных чисел) классических групп. Особое внимание обращено на представления группы вращений n-мерного пространства и общей группы Лоренца (т. е. группы вещественных матриц n-го порядка, сохраняющих квадратичную форму

$$F(\xi) = -\xi_1^2 - \ldots - \xi_l^2 + \xi_{l+1}^2 + \ldots + \xi_n^2 \Big).$$

Изложение более строгое и последовательное, чем в аналогичной книге Мурнагана (Теория представлений. Изд-во ин. лит., 1950, стр. 485). От читателя требуется лишь общая математическая подготовка. Общая теория конечномерных представлений компактных

групп и групп Ли в книге отсутствует, хотя отдельные краткие сведения об этих группах приводятся. Бесконечномерные представления даже не упоминаются; мало конкретных формул, отсутствуют таблицы, которых много, например, в книге Мурнагана; не рассматриваются кристаллографические группы Случай поля конечной характеристики и соответствующая ему теория так называемых модулярных представлений не рассматривается совсем.

Содержание: 1. Матрицы. 2. Группы. 3. Общая теория представлений. 4. Представления симметрических групп. 5. Представления полных линейных, унимодулярных и унитарных групп. 6. Характеры линейных групп и групп подстановок. Знакопеременная группа. 7. Характеры и однозначные представления группы вращений. 8. Спинорные представления, инфинитезимальное кольцо, обычная группа вращений. 9. Группа Лоренца. М. И. Граев

6429 Д. **Топологические локально нильпотентные группы. Глушков В. М.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

6430 Д. **К теории перестановок. Избицкий** (Beiträge zur Theorie der Permutationen. Izbicki Herbert. — Diss. phil. Wien, 1955, 60 Bl. Maschinenschr.), Oesterr. Bibliogr., 1955, № 11, 9 (нем.)

6431 Д. **Нильпотентные группы с условием минимальности для абелевых нормальных делителей. Бачурин Г. Ф.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Молотовск. ун-т, Молотов, 1955

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

6432. **О полях второго класса. Фрёлих** (On fields of class two. Fröhlich A.), Proc. London Math. Soc., 1954, 4, № 14, 235—256 (англ.)

Полем второго класса называется нормальное поле алгебраических чисел, коммутант группы Галуа которого содержится в центре. Исследуются поля второго класса над полем рациональных чисел. Вводятся понятия максимального абелева поля с данным ведущим идеалом и его максимального расширения второго класса. Основной результат работы (теорема 4) дает обозримое описание группы Галуа максимального расширения второго класса максимального абелева поля. Доказывается ряд других теорем, дающих описание всех полей второго класса, содержащих данное максимальное абелево поле в качестве подполя, принадлежащего коммутанту. Доказательства основываются на теории полей классов. Д. К. Фаддеев

6433. **Теорема единственности в теории погружения нормальных полей. Бейер** (Ein Einzigkeitssatz in der Einbettungstheorie galoisscher Körper. Beyer Gudrun), Math. Nachr., 1954, 11, № 4/5, 317—320 (нем.)

Пусть Ω/Ω_0 — нормальное расширение с группой Галуа F и пусть $F = G/N$, где G — некоторая конечная группа. Тогда в групповом кольце A группы N над полем Ω любому элементу $\sigma \in G$ соответствует автоморфизм $P \to P^\sigma$, где $P^\sigma = \Sigma\, p_S^\sigma s^\sigma$, если $P = \Sigma\, p_S s$, $s \in N$, $p_S \in \Omega$, P_S^σ — образ элемента P_s при автоморфизме $\sigma \in F$, где σ' — образ элемента σ при естественном гомоморфизме группы G на группу F, а $s^\sigma = \sigma^{-1} s \sigma$. Предположим, что для любого элемента $x \in F$ в группе G выбран некоторый его представитель $\bar{x}$. Тогда $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}\, q_{xy}$, где $q_{xy} \in N$. Как известно, вопрос о погружении поля Ω в нормальное поле с группой Галуа G над Ω_0 связан с разрешимостью относительно $b_x \in A$ системы уравнений $b_{xy} q_{x,y} = b_y b_x^{\overline{y}}$.

Доказывается, что если поле Ω_0 бесконечно и b_x — некоторое решение указанной системы, то любое ее другое решение b'_x имеет вид $b'_x = a^{-1} b_x a^{\overline{x}}$, где a — некоторый обратимый элемент из A. И. Р. Шафаревич

6434. **Однозначные отображения групп в поля. Масуда** (One-valued mappings of groups into fields. Masuda Katsuhiko), Nagoya Math. J., 1953, 6, October, 41—52 (англ.)

Алгебра K над полем Ω называется алгеброй Галуа с конечной группой G, если задано изоморфное отображение группы G в группу автоморфизмов алгебры K (образ элемента $\alpha \in K$ при автоморфизме, соответствующем элементу $\sigma \in G$, обозначается через α^σ) и существует такой элемент $\theta \in K$, что элементы θ^σ, $\sigma \in G$, образуют базис алгебры K над полем Ω. Пусть $D_\chi(\sigma)$, $\chi \in X$, — система всех неразложимых составляющих регулярного представления группы G. Тогда для любых φ и $\psi \in X$ существуют такие матрицы $P_{\varphi_1\psi}$, что

$$D_\varphi(\sigma) \times D_\chi(\sigma) = P^{-1}_{\varphi_1\psi} \sum\nolimits_i D_{\chi_i}(\varphi_1\psi)(\sigma)\, P_{\varphi_1\psi}$$

(знак Σ обозначает прямую сумму). Определим в нашем кольце матрицу над алгеброй Галуа K матрицы A_χ, положив $A_\chi = \Sigma_\sigma D_\chi(\sigma^{-1})\,\theta^\sigma$. Оказывается, что существуют такие матрицы $C_{\varphi_1\psi}$, что

$$A_\varphi \times A_\psi = P^{-1}_{\varphi_1,\psi} \sum\nolimits_i A_{\chi_i}(\varphi_1\psi)\, P_{\varphi_1\psi} C_{\varphi_1\psi}.$$

Известно, что алгебра K однозначно определяется заданием матриц $G_{\varphi_1\psi}$ (Hasse, J. reine und angew. Math., 1949, 187, 14—43; Nakayama, там же, 1951, 189, 100—117). Автор находит условия на $C_{\varphi_1\psi}$ для того, чтобы ассоциативная коммутативная и полупростая алгебра K была полем.

Далее автор показывает, что автоморфизмы алгебры K, коммутирующие с каждым оператором из группы G, находятся во взаимно однозначном соответствии с системами матриц C_χ, $\chi \in X$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $C_{\varphi_2} \times C_\psi = C^{-1}_{\varphi_1\psi} P^{-1}_{\varphi_1\psi} \Sigma_i C_{\chi_i(\varphi_1\psi)} P_{\varphi_1\psi} C_{\varphi_1\psi}$,

2) $\mathrm{Sp}\,(D_\chi(\sigma^{-1})\, C_\chi M_\chi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Sp}\,(D_\chi(\sigma^{-1})\, M_\chi) = 0$.

Системы таких матриц $\{C_\chi,\ \chi \in X\}$ относительно умножения $\{C^{(1)}_\chi\}\,\{C^{(2)}_\chi\} = (C^{(1)}_\chi C^{(2)}_\chi)$ образуют группу, обозначаемую через G^*. Если $C_{\varphi_1\psi}$ являются единичными матрицами, то условиям 1) и 2) удовлетворяют системы $\{D_\chi(\sigma)\}$. Эти системы образуют подгруппу G' группы G^*.

Эти понятия переносятся на случай, когда группа G компактна, представления $D_\chi(\sigma)$ являются неприводимыми непрерывными унитарными представлениями группы C, а алгебра K есть алгебра функций на G, являющихся пределами в смысле равномерной сходимости линейных комбинаций функций $d^{(ij)}_\chi(\sigma)$. В этом случае матрицы $C_{\varphi\psi}$ единичны, так что определена подгруппа G'. Доказывается, что подгруппа C'_* совпадает с подгруппой группы G^*, состоящей из систем унитарных матриц. Это утверждение равносильно теореме двойственности Таннака. И. Р. Шафаревич

6435. **Фундаментальный базис композита квадратичных полей.** Литвер Е. Л., Уч. зап. Ростовск. н/Д. ун-та, 1955, **32**, № 4, 29—36

Элементарная попытка указать эффективный метод построения фундаментального базиса алгебраических полей, представляющих композит конечного числа квадратичных полей над полем рациональных чисел.

Примечание референта. Идеи, которыми пользуется автор для построения фундаментального базиса, в наиболее общей форме, применительно к полям алгебраических функций, были указаны Н. Г. Чеботаревым (Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948, §§ 11, 39). Результат автора в конце работы, касающийся дискриминанта K_n, вызывает сомнение (Hilbert D., Gesammelte Abhandlungen, Bd. 1, Zahlentheorie, Berlin, 1932, § 13, теорема 88). Имеются опечатки и неточности в формулировках, которые затрудняют чтение работы.

Б. М. Уразбаев

6436. **Замечание о двумерных расширениях кольца с делением.** Джейкобсон (A note on two dimensional division ring extensions. Jacobson N.), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 3, 593—599 (англ.)

Кольцо с делением Δ называется кольцом Галуа над подкольцом с делением Γ, если элементы Γ инвариантны относительно некоторой группы автоморфизмов, действующей в Δ. Доказано, что если ранг кольца Γ над своим центром конечен, характеристика кольца Γ отлична от двух, а левый ранг $[\Delta:\Gamma]_L$ равен двум, то Δ есть кольцо Галуа над Γ. На примерах показано, что в условиях этой теоремы требование конечности ранга кольца Γ не может быть опущено.

В. А. Андрунакиевич

6437. **Замечание к основной теореме теории Галуа для тел.** Каш (Bemerkung zum Hauptsatz der Galoisschen Theorie für Schiefkörper. Kasch Friedrich), Arch. Math., 1955, **6**, № 6, 420—422 (нем.)

Пусть G — группа автоморфизмов тела K, L — тело G-инвариантных элементов из K, M — кольцо линейных преобразований правого L-модуля K, S — подкольцо кольца M, порожденное группой G и кольцом K_l левых умножений на элементы из K. Показывается, что правый ранг $(K:L)$ конечен тогда и только тогда, когда конечен левый ранг $(S:K_l)$. В этом случае $(K:L)=(S:K_l)$ и $S=M$. Это предложение позволяет упростить доказательство основной теоремы теории Галуа для тел.

З. И. Боревич

6438. **Распространение круллевой теории Галуа на кольца с делением.** Нобусава (An extension of Krull's Galois theory to division rings. Nobusawa Nobuo), Osaka Math. J., 1955, **7**, № 1, 1—6 (англ.)

Пусть G — некоторая группа автоморфизмов тела P и φ — тело G-инвариантных элементов тела P. Предполагается, что 1) группа G содержит все автоморфизмы тела P, не меняющие элементов из φ (такая группа автоморфизмов называется максимальной); 2) кольцо, порожденное телом φ и конечным числом элементов из P, имеет конечный (левый) ранг над φ; 3) каждый элемент из P отображается автоморфизмами из G в конечное число элементов. Тогда в группе G вводится топология и устанавливается взаимно однозначное соответствие между замкнутыми максимальными подгруппами группы G и телами Σ, для которых $\varphi\subset\Sigma\subset P$.

З. И. Боревич

6439. **О проблеме Шевалле.** Куниёси (On a problem of Chevalley. Kuniyoshi Hideo), Nagoya Math. J., 1955, **8**, February, 65—67 (англ.)

Пусть $K=k(x_1,\ldots,x_p)$ — чисто трансцендентное расширение поля k характеристики p (степени трансцендентности p) и S — автоморфизм поля K, индуцируемый циклической перестановкой $(x_1,\ldots,x_p)$. Доказывается, что подполе S-инвариантных элементов поля K чисто трансцендентно над k.

З. И. Боревич

6440. **Метаматематический подход к вопросу об относительной неприводимости многочленов.** Гилмор, Робинсон (Metamathematical considerations on the relative irreducibility of polynomials. Gilmore P. C., Robinson A.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 4, 483—489 (англ.)

Пусть K — бесконечное поле и $S=K(t)$ — его трансцендентное расширение. Говорят, что поле K удовлетворяет условию C, если для всякого многочлена $p(t,x)$ от x с коэффициентами из поля S, не имеющего корней в S, существует такой элемент $t^*\in K$, что многочлен $p(t^*,x)$ не имеет корней в K.

В работе при помощи теоремы о полноте узкого исчисления предикатов доказывается, что если поле K удовлетворяет условию C, то существует такое расширение S' поля S, что каждый элемент из S', не принадлежащий S, трансцеденген над S, и S' является моделью множества всех высказываний (некоторого «языка», соответствующего полю K), истинных в K. Из этой метаматематической теоремы выводятся некоторые «конкретные» утверждения, являющиеся обобщениями и уточнениями теоремы Гильберта о неприводимости.

Ю. А. Шиханович

6441. **Область целостности с однозначным разложением элементов в произведение простых элементов.** Кант (Über Integritätsbereiche mit eindeutiger Primelementzerlegung. Kantz Georg), Arch. Math., 1955, **6**, № 5, 397—402 (нем.)

Дается новое доказательство теоремы 3 из другой работы автора (РЖМат, 1956, 2820).

Е. Г. Шульгейфер

6442. **Одна теорема об изоморфизме вещественно замкнутых полей.** Эрдеш, Гилман, Хенриксен (An isomorphism theorem for real-closed fields. Erdös P., Gillman L., Henriksen M.), Ann. Math., 1955, **61**, № 3, 542—554 (англ.)

Упорядоченное множество L называется η_σ-множеством (термин Хаусдорфа), где α — некоторое порядковое число, если: 1) для любых его подмножеств A и B мощности $<\aleph_\alpha$, для которых $a<b$ при $a\in A$, $b\in B$, существует такой элемент $x\in L$, что $a<x<b$ при всех $a\in A$, $b\in B$ и 2) для каждого подмножества A мощности $<\aleph_\alpha$ существуют такие элементы $x_1, x_2\in L$, что $x_1<a<x_2$ для всех $a\in A$.

Доказывается, что при $\alpha>0$ всякие два вещественно замкнутых поля мощности $\aleph_\alpha$, являющиеся η_α-множествами (в их естественной упорядоченности), изоморфны. (Вопрос о существовании таких полей связан с континуум-проблемой, существование $\eta_{\beta+1}$-множества мощности $\aleph_{\beta+1}$ эквивалентно гипотезе $2^{\aleph_\beta}=\aleph_{\beta+1}$.)

Пусть далее $C=C(X)$ — кольцо всех непрерывных вещественных функций, определенных на вполне регулярном пространстве X. Для любого максимального идеала M кольца C фактор-кольцо C/M является вещественно замкнутым полем, содержащим поле вещественных чисел R (Hewitt E., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **64**, № 1, 45—99). Если $C/M\neq R$, то идеал M и поле C/M называются гипервещественными. Оказывается, что гипервещественное поле является η_1-множеством. Отсюда следует (в предположении справедливости континуум-гипотезы $c=\aleph_1$), что все гипервещественные поля мощности $c=\aleph_1$ изоморфны. Далее, если X — бесконечное дискретное пространство, то существует такой гипервещественный идеал M, что мощ-

ность поля C/M равна $\mathfrak{c}$, а если пространство X имеет мощность $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{c}$, то при некотором M поле C/M имеет мощность $> \mathfrak{m}$. Следовательно, существуют неизоморфные гипервещественные поля, связанные с одним и тем же дискретным пространством. Сформулировано несколько нерешенных проблем. З. И. Боревич

6443. Две теоремы приведения, относящиеся к проблеме вложения. Кохендёрфер (Zwei Reduktionssätze zum Einbettungsproblem. Kochendörffer Rudolf), Wiss. Z. Univ. Rostock, 1952/1953, 2, № 2, 61—66 (нем.)

Доказано, что проблема вложения нормального поля Ω с группой Галуа $\mathfrak{g}$ в нормальное поле K с группой Галуа $\mathfrak{G}$ в предположении, что $\mathfrak{g}$ является фактор-группой группы $\mathfrak{G}$ по абелевому нормальному делителю $\mathfrak{A}$, сводится к случаю, когда $\mathfrak{A}$ является p-группой. С другой стороны, если $\mathfrak{A}$ является p-группой, то проблема вложения для $\mathfrak{g}$ сводится к проблеме вложения для силовской p-подгруппы группы $\mathfrak{g}$. Доказательства содержат сравнительно сложные вычисления, производимые под групповыми характерами; автор указывает на возможность получения доказательств, не связанных со сложными вычислениями. В. К. Туркин

6444. Об одной лемме существования в теории метрик. Нагата, Накаяма, Цудзуку (On an existence lemma in valuation theory. Nagata Masayoshi, Nakayama Tadasi, Tuzuku Tosiro), Nagoya Math. J., 1953, 6, Oktober, 59—61 (англ.)

Пусть K — поле, которое либо имеет характеристику 0, либо не является абсолютно алгебраическим, и пусть L — его конечное сепарабельное расширение. Тогда в поле L существует бесконечно много норм первой степени над K. А. И. Скопин

6445. Об обобщенной теореме о главном идеале. Тэрада (On a generalized principal ideal theorem. Terada Fumiyuki), Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 2, 3, 95—100 (англ.)

Пусть k — конечное расширение поля рациональных чисел, K — абсолютное поле классов над k, Ω/k — циклическое подполе поля K. Автором ранее было доказано, что каждый идеал поля Ω, принадлежащий инвариантному классу идеалов (относительно автоморфизмов поля Ω/k), становится главным в поле K (Tôhoku Math. J., 1950, 1, № 3, 229—269). Доказательство этого обобщения теоремы о главном идеале сводится с помощью закона взаимности Артина к следующей теореме из теории групп: Пусть G — конечная группа с абелевым коммутантом G', H — нормальный делитель группы G с циклической фактор-группой G/H и пусть для любого элемента $\rho \in H/G'$ выбран в группе H некоторый представитель ρ. Тогда, если смежный класс aH' при $a \in H$ принадлежит центру фактор-группы G/H', то $\Pi_\rho \rho a \rho^{-1} = 1$. В реферируемой работе приводится новое, более простое доказательство последней теоремы. З. И. Боревич

6446. О минимальных идеалах в коммутативных кольцах. Герендон (Sur les idéaux minimaux dans les anneaux commutatifs. Guérindon Jean), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 2, 145—147 (франц.)

Говорят, что подмодуль J модуля $\mathfrak{M}$ покрывает подмодуль I, если $J \supset I$ и для любого подмодуля I' из $J \supset I' \supset I$ следует, что либо $I' = J$, либо $I' = I$. Доказано, что если кольцо A операторов модуля $\mathfrak{M}$ коммутативно (и обладает единицей), то подмодуль J тогда и только тогда покрывает подмодуль I, когда в $\mathfrak{M}$ существует такой элемент x, что $J = I + Ax$, причем частное $I : Ax$ является максимальным идеалом в A. В частности, для $\mathfrak{M} = A$ отсюда следует, что идеал $I \neq A$ тогда и только тогда можно покрыть некоторым идеалом J, когда существует такой максимальный идеал M, что $I : M \neq I$. Покрывающие идеалы J имеют вид $I + Ax$, где x — любой отличный от нуля элемент разности $I : M \setminus I$. Кроме того, доказано, что в коммутативном кольце с единицей A тогда и только тогда любой ненулевой идеал содержит минимальные идеалы, когда для всякого $u \neq 0$ идеал $(0) : Au$ может быть покрыт. В. А. Андрунакиевич

6447. Теория идеалов. VI. Аддитивное обобщение теории идеалов. Герендон (Théorie des idéaux. VI. Généralisation additive de la théorie des idéaux. Guérindon J.), Sémin. P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1954/1955, 8, № 14, 1—14 (франц.)

Модуль $\mathfrak{M}$ над коммутативным кольцом A с единицей называется нетеровым A-модулем, если он удовлетворяет условию максимальности для допустимых подмодулей, причем единица кольца A является тождественным оператором в $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_1$ — подмодули нетерова A-модуля $\mathfrak{M}$, I — идеал в A, $\mathfrak{N} : \mathfrak{N}_1$ — идеал, состоящий из таких $x \in A$, что $x\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}$, и $\mathfrak{N} : I$ — подмодуль, состоящий из таких $m \in \mathfrak{M}$, что $mI \subset \mathfrak{N}$. Идеал $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ называется образом подмодуля $\mathfrak{N}$. Подмодуль $\mathfrak{N}$ модуля $\mathfrak{M}$ называется примарным, если из $b\alpha \in \mathfrak{N}$, $b \in A$, $\alpha \notin \mathfrak{N}$ следует, что $b^r \in \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ при некотором r. Подмодуль $\mathfrak{N}$ называется простым, если из тех же условий следует, что $b \in \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$. Образ примарного подмодуля примарен, образ простого подмодуля прост. Радикалом примарного подмодуля $\mathfrak{N}$ называется радикал p идеала $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$. Примарный подмодуль с радикалом p называется p-примарным. Примарный подмодуль прост тогда и только тогда, когда прост его образ. Однако образ непримарного подмодуля может оказаться простым. Пересечение конечного множества p-примарных подмодулей также является p-примарным подмодулем.

Подмодуль называется приводимым, если он представим в виде пересечения двух больших подмодулей, и неприводимым в противном случае. Доказывается, что всякий подмодуль нетерова модуля является пересечением конечного числа неприводимых подмодулей и что всякий неприводимый подмодуль является примарным. Представление подмодуля в виде пересечения примарных подмодулей называется нормальным, если ни один подмодуль не содержит пересечения остальных и радикалы различных модулей различны. Доказывается, что любой подмодуль нетерова модуля обладает нормальным представлением. Число примарных идеалов нормального представления и их радикалы однозначно определены.

Таким же образом, как и для колец, определяются понятия компоненты и изолированной компоненты нормального представления подмодуля в виде пересечения примарных подмодулей. Находятся некоторые необходимые и достаточные условия для того, чтобы подмодуль $\mathfrak{N}'$ был изолированной компонентой модуля $\mathfrak{N}$. Доказывается предложение, из которого следует, что изолированные компоненты определены однозначно.

Далее рассматривается связь между простыми идеалами, соответствующими модулю $\mathfrak{N}$ и его образу $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$. Оказывается, что образу $\mathfrak{N} : \mathfrak{M}$ соответствуют некоторые из простых идеалов, соответствующих модулю $\mathfrak{N}$. Пример непримарного подмодуля с простым образом показывает, что при переходе от подмодуля к его образу некоторые простые идеалы могут действительно потеряться.

Пересечение $\mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_s$ называется прямым в $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{N}_1 + (\mathfrak{N}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_s) = \ldots = (\mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_{s-1}) + \mathfrak{N}_s = \mathfrak{M}$. Пересечение $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_s$ называется дважды прямым, если пересечение $\mathfrak{N} : \mathfrak{M} =$

$= (\mathfrak{N}_1 : \mathfrak{M}) \cap \ldots \cap (\mathfrak{N}_s : \mathfrak{M})$ является прямым в A. Дважды прямое пересечение всегда является прямым. Подмодули $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ называются взаимно простыми, если $(\mathfrak{N}_1 : \mathfrak{M}) + (\mathfrak{N}_2 : \mathfrak{M}) = A$. Пересечение $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{N}_s$ является дважды прямым тогда и только тогда, если подмодули $\mathfrak{N}_i$ попарно взаимно просты. Доказывается, что любой подмодуль $\mathfrak{N}$ разложим в дважды прямое пересечение однозначно определенных подмодулей $\mathfrak{N}_i$, каждый из которых уже в этом смысле неразложим. Я. В. Хион

6448. **Некоторые исследования о фробениусовых алгебрах. II. Осима** (Some studies on Frobenius algebras. II. Osima Masaru), Math. J. Okayama Univ., 1954, 3, № 2, 109—119 (англ.)
Ч. I см. Jap. J. Math., 1951, 21, 179—190.

Приводятся новые доказательства нескольких уже известных теорем, характеризующих фробениусовы и квазифробениусовы алгебры. Затем в предположении, что все рассматриваемые алгебры конечного ранга, доказывается, что алгебра A с единицей тогда и только тогда фробениусова, когда A обладает парой таких базисов (a_i) и $(\overline{a}_i)$, что в прямом произведении $A \times A$ выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} a a_i \times \overline{a}_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \times \overline{a}_i a \quad \text{для каждого } a \in A; \quad (1)$$

базисы (a_i) и $(\overline{a}_i)$ называются дуальными базисами фробениусовой алгебры A. Для того чтобы алгебра A была симметрической, необходимо и достаточно, чтобы одновременно с соотношением (1) было справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} a\overline{a}_i \times a_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i \times a_i a \quad \text{для каждого } a \in A;$$

в этом случае базисы (a_i) и (a_i) называются квазидополнительными.

Опираясь на указанные утверждения, автор доказывает, что:

алгебра A — симметрическая тогда и только тогда, когда симметрической является ее базисная алгебра A^0; раньше эта теорема была доказана лишь в предположении, что основное поле алгебраически замкнуто (см., например, работу Несбитта и Скотта (Nesbitt C., Scott W. M., Ann. Math., 1943, 44, 534—553)). Аналогичные утверждения доказываются и для почти симметрических и слабо симметрических алгебр. Кроме того, доказано, что если автоморфизм Накаяма φ фробениусовой алгебры A индуцирует автоморфизм φ_0 базисной алгебры A^0, то φ_0 будет автоморфизмом Накаяма алгебры A^0. Обратно, каждый автоморфизм Накаяма φ_0 базисной алгебры A^0 допускает расширение до автоморфизма Накаяма φ всей фробениусовой алгебры A.

Далее приводится простое доказательство теоремы о том, что фробениусова алгебра сепарабельна тогда и только тогда, когда она обладает такими дуальными базисами (a_i) и $(\overline{a}_i)$, что $\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a}_i = 1$. Эта теорема равносильна одному из критериев сепарабельности, указанных Хохшильдом (Hochschild G., Ann. Math., 1946, 47, 568—579). Последний параграф посвящен квазифробениусовым алгебрам, и в нем, в частности, доказывается, что алгебра A тогда и только тогда квазифробениусова, когда квазифробениусовой является алгебра A_z, где z — произвольное расширение основного поля F алгебры A. Е. Г. Шульгейфер

6449. **Некоторые приложения теории r-идеалов к теории метрик. Ауберт** (Some applications of r-ideals to valuation teory. Aubert Karl Egil), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 4 (англ.)

6450. **Построение базиса для векторного пространства остаточных форм в алгебре Грассмана. Лал** (Construction of a basis for the vector space of remainders in the algebra of Grassmann. Lal Goverdhan), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, 40, № 11, 1046—1057 (англ.)

Пусть A — ассоциативная алгебра с образующими $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и определяющими соотношениями: $\alpha_i \wedge \alpha_j = \alpha_j \wedge \alpha_i$, $\alpha_i^2 = 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ над некоторым полем нулевой характеристики и пусть $H = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Форма F_k степени k от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называется остаточной формой, если $F_k \wedge H^{n-2k+1} = 0$. В частном случае, когда $\alpha_i = x_i \wedge y_i$, где $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ — образующие алгебры Грассмана, это понятие было введено Лепажом (Lepage, Bull. Soc. roy sci. Liège, 1946, 21—31; Algèbre et théorie des nombres, colloque du CNRS, Paris, 1950, 181—186). Остаточные формы степени k образуют векторное пространство R_k размерности $\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$ $(\dim R_k = 0$, если $k > [n/2])$. Любая форма F_k степени $k \geqslant 1$ от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ допускает одно и только одно представление вида $F_k = F_k \wedge H + rF_k$, где F_{k-1} — некоторая форма степени $k-1$, а rF_k — остаточная форма, называемая остатком данной формы F_k.

В работе приводится два эффективных способа построения базисов пространств R_k и дается новая формула для эффективного вычисления остатка любой формы F_k. В. М. Глушков

6451. **Алгебры бесконечного ранга с условием минимальности для подалгебр. Шнейдмюллер В. И.**, Сб. науч. тр. Магнитогорск. горно-металлургич. ин-та, 1954, № 7, 360—372

Доказано, что алгебра, в которой любая убывающая цепочка подалгебр обрывается после конечного числа шагов, является прямой суммой конечного числа неразложимых алгебр, каждая из которых есть либо алгебра конечного ранга, либо алгебра с делением. Если в каждом из двух разложений алгебры на неразложимые слагаемые объединить слагаемые конечного ранга, то получившиеся разложения будут изоморфны. Если проблема Куроша о локальной конечности алгебраических алгебр с неограниченными степенями элементов имеет положительное решение, то прямые слагаемые, являющиеся алгебрами с делением, имеют конечный ранг над своим центром, причем центр есть алгебраическое расширение основного поля. Краткое изложение результатов этой работы было опубликовано автором ранее (Докл. АН СССР, 1952, 86, № 4). В. А. Андрунакиевич

6452. **Об одном новом типе радикала. Фукс** (On a new type of radical. Fuchs L.), Acta scient. math., 1955, 16, № 1—2, 43—53 (англ.)

Идеал (двусторонний) B произвольного кольца K называется левым делителем нуля, если каждый его элемент является левым делителем нуля. Идеал A называется левым нулеобразным, если для любого левого делителя нуля B сумма $A + B$ является левым делителем нуля. Сумма всех левых нулеобразных идеалов является левым нулеобразным идеалом. Аналогично определяются правые делители нуля и правые нулеобразные идеалы. Пересечение Z суммы всех левых нулеобразных и суммы всех правых нулеобразных идеалов называется нулеобразным радикалом кольца K. Каждый элемент кольца K тогда и только тогда является

левым и правым делителем нуля, когда $K = Z$. Регулярное в смысле Неймана кольцо K с единицей Z-полупросто, т. е. $Z(K) = 0$. Радикал Z коммутативного подпрямо неразложимого кольца совпадает с множеством всех его делителей нуля. В общем случае радикал является пересечением некоторых простых идеалов и содержит все нильидеалы, т. е. содержит радикал Кётэ Фактор-кольцо K/Z не содержит нильидеалов. Вопрос о справедливости равенства $Z(K/Z) = 0$ остается открытым. В. Андрунакиевич

6453. Замечание о f-регулярности в кольцах. Блэр (A note on f-regularity in rings. Blair R. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 4, 511—515 (англ.)

Элемент a кольца A называется f-регулярным, если $a \in (a)^2$, где (a) — главный двусторонний идеал, порождаемый элементом a. Идеал кольца A называется f-регулярным, если каждый его элемент f-регулярен. Автором ранее было доказано, что в классе ассоциативных колец определен f-регулярный радикал $F(A)$. В реферируемой работе доказывается, что для любого идеала B кольца A имеет место равенство $F(B) = B \cap F(A)$. Кроме того, доказывается, что f-регулярный радикал полного матричного кольца порядка n над кольцом A является полным кольцом матриц над радикалом $F(A)$ кольца A.

Пусть $J(A)$ — радикал Джейкобсона. Ставится вопрос о справедливости для любого кольца A равенства $J(A) \cap F(A) = 0$. Оказывается, что справедливость этого равенства равносильна тому, что любое f-регулярное кольцо A полупросто (т. е. $J(A) = 0$), а также тому, что любое простое ненулевое кольцо полупросто. Соответствующее равенство для радикала $N(A)$ Бэра—Маккоя доказывается: $F(A) \cap N(A) = 0$. В заключение показано, что если в кольце выполнено условие минимальности для всех правых идеалов, то радикал $F(A)$ совпадает с регулярным радикалом Брауна—Маккоя. Заметим, что последний результат остается справедливым и тогда, когда в кольце выполнено условие минимальности лишь для главных правых идеалов. В. А. Андрунакиевич

6454. Об обратных спектрах с тривиальными пределами. Хигман, Стоун (On inverse systems with trivial limits. Higman Graham, Stone A. H.), J. London Math. Soc., 1954, 29, Part 2, № 114, 233—236 (англ.)

Над направленным множеством типа ω_1 построен обратный спектр счетных колец, все проекции которого являются эпиморфизмами, а предельное кольцо тривиально. М. М. Постников

6455. О нульмерном компактном кольце. Исеки (On 0-dimensional compact ring. Iséki Kiyoshi), Math. Japonicae, 1953, 3, 37—40 (англ.)

Доказано, что каждая окрестность нуля нульмерного компактного кольца R содержит открытый компактный двусторонний идеал. (Этот результат непосредственно следует из лемм 9 и 10 Капланского (Kaplansky, Amer. J. Math., 1947, 69, 153—183).) Отсюда обычным способом получается, что R является пределом обратного спектра конечных колец R_α. Оказывается, что: 1) элемент кольца R квазирегулярен тогда и только тогда, когда квазирегулярны все его проекции на кольца R_α; 2) кольцо R тогда и только тогда обладает единицей, когда каждое кольцо R_α обладает единицей; 3) элемент кольца R тогда и только тогда является делителем единицы, когда делителем единицы являются все его проекции на кольца R_α. P. S. Mostert

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, №. 1, 8

6456. Аналоги кольца целых рациональных чисел. Брук (Analogues of the ring of rational integers. Bruck R. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 1, 50—58 (англ.)

Множество R, в котором определены операции сложения и умножения, называется неокольцом, если относительно сложения оно является лупой и умножение дистрибутивно относительно сложения. Если умножение дистрибутивно только справа и $x0 = 0$ для любого $x \in R$, где 0 — нуль лупы, то множество R называется правым неокольцом. Левым ядром правого неокольца R называется совокупность всех таких элементов $a \in R$, что $(ax)y = a(xy)$ для любых элементов $x, y \in R$. Центром неокольца R называется совокупность всех таких элементов $a \in R$, что $ax = xa$, $(ax)y = a(xy) = x(ay)$ для любых элементов $x, y \in R$.

Доказывается, что если (правое) неокольцо R имеет (левую) единицу 1, то подлупа, порожденная этим элементом, в аддитивной лупе неокольца R является (правым) поднеокольцом, содержащимся в (левом ядре) центре неокольца R.

Пусть теперь A — аддитивно записанная свободная лупа с одним образующим. Для любого элемента $x \in A$ существует единственный эндоморфизм $\varphi(x)$ лупы A, переводящий образующий элемент 1 в элемент x. Определим в A умножение, положив $yx = y\varphi(x)$. Относительно этого умножения лупа A является ассоциативным правым неокольцом без делителей нуля, в котором любая подлупа является правым поднеокольцом. Оказывается, что для любого правого неокольца R с левой единицей 1, аддитивная лупа которого порождается элементом 1, гомоморфизм лупы A на аддитивную лупу неокольца R, переводящий образующую лупы A в единицу 1, является гомоморфизмом правого неокольца A на правое неокольцо R.

Работа содержит также некоторые утверждения о неополях (т. е. о неокольцах с коммутативным и ассоциативным умножением, в которых любое уравнение вида $ax = b$, где $a \neq 0$ разрешимо). Я. В. Хион

6457. Архимедовски упорядоченные кольца. Хион Я. В., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4 (62), 237—242

Доказано, что некоторое (вообще говоря, неассоциативное) кольцо S тогда и только тогда архимедовски упорядочиваемо, когда существует изоморфное отображение кольца S в кольцо R, где R — любая аддитивная группа действительных чисел, рассматриваемая как кольцо с нулевым умножением, либо поле действительных чисел. Все способы архимедовского упорядочения кольца S исчерпываются упорядочениями, соответствующими изоморфным вложениям $\varphi : S \to R$. Два вложения $\varphi_1, \varphi_2 : S \to R$ тогда и только тогда определяют одинаковые (соответственно изоморфные) упорядоченности кольца S, когда существует такое действительное положительное число r, что $\varphi_1(S) = r\varphi_2(S)$, для любого $s \in S$ (соответственно $\varphi_1(S) = r\varphi_2(S)$). (В случае колец с ненулевым умножением, число r должно быть равно единице). М. И. Зайцева

6458. Об алгебрах дифференцирований и голоморфах нильпотентных алгебр. Шенкман (On the derivation algebra and the holomorph of a nilpotent algebra. Schenkman Eugene), Mem. Amer. Math. Soc., 1955, № 14, 15—22 (англ.)

Голоморфом алгебры Ли L называется алгебра Ли, пространство которой является прямой суммой $L + D$, где D — алгебра дифференцирований алгебры L, а операция коммутирования определяется формулой $[l_1 + d_1, l_2 + d_2] = [l_1, l_2] + l_1 d_2 - l_2 d_1 + [d_1, d_2]$, $l_1, l_2 \in L$; $d_1 d_2 \in D$. Доказано, что если L — свободная нильпотентная алгебра Ли с q образующими, то ее алгебра дифференцирований D имеет размерность в q раз большую размерности алгебры L; нильрадикал алгебры D совпадает с множеством D_1 дифференцирований, отображающих L в L^2, а нильрадикал голоморфа алгебры L равен $L + D_1$. Далее, если L является коммутативной

алгеброй Ли конечной размерности или свободной нильпотентной алгеброй Ли с $q \geq 2$ образующими, то любая алгебра Ли, гомоморф которой изоморфен гомоморфу алгебры L, сама изоморфна L. Как известно, для коммутативных групп имеет место аналогичный результат (РЖМат, 1954, 1571). В. М. Глушков

6459. **Простое доказательство теоремы Холла о конечных невырожденных частичных плоскостях. Пиккерт** (Einfacher Beweis eines Satzes von M. Hall über offene Inzidenzstrukturen. Pickert Günter), Arch. Math., 1955, 6, № 6, 417—419 (нем.)

Дается новое доказательство следующей теоремы Холла (Hall M., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 55, 229—277) (используется терминология статьи референта в Усп. матем. наук, 1951, 6, № 6, 112—154, § 2): Невырожденная конечная частичная плоскость свободно эквивалентна частичной плоскости, состоящей из n ($n \geqslant 4$) точек и одной прямой, на которой располагается в точности $n-2$ точки. Л. А. Скорняков

6460. **О проективной геометрии над полными матричными кольцами. Ри** (On projective geometry over full matrix rings. Reе Rimhak), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 1, 144—150 (англ.)

Проективной геометрией $L(R, A)$ над кольцом R называется структура всех R-подмодулей некоторого R-модуля A. Оказывается, что для любого n произвольная проективная геометрия над полным матричным кольцом R_n степени n над R изоморфна некоторой проективной геометрии над кольцом R и обратно.

Далее, пусть π — некоторое теоретико-структурное условие и $\mathfrak{F} = \{R, S, \ldots\}$ — такое семейство колец, что любой структурный изоморфизм между геометриями $L(R,A)$ и $L(S, B)$ $(R, S \in \mathfrak{F})$, удовлетворяющими условию π, порождается полулинейным преобразованием (Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, М., 1955, 59 и 62). Тогда для любого n оказывается, что любой структурный изоморфизм между геометриями $L(R_n, A)$ и $L(S_n, B)$ $(R, S \in \mathfrak{F})$, также удовлетворяющими условию π, порождается полулинейным преобразованием, причем изоморфизм σ^1 кольца R_n на кольцо S_n, входящий в полулинейное преобразование, всегда можно выбрать так, чтобы он имел вид $(a_{ij})\sigma' = (a_{ij}^{\sigma''})$, где σ'' — некоторый изоморфизм кольца R на кольцо S.

Из этих утверждений вытекает, что если любой структурный автоморфизм геометрии $L(R, A)$, где A — прямая сумма n экземпляров кольца R, порождается полулинейным преобразованием и если в кольце R_n любая левая обратная матрица является правой обратной, то любой автоморфизм α кольца R_n имеет вид $(a_{ij})^{\alpha} = U^{-1}(a_{ij}^{\alpha'})U$, где α' — автоморфизм кольца R, а $U \in R_n$. Л. А. Скорняков

6461. **Дедекиндовы структуры и теорема Дезарга. Йонссон** (Modular lattices and Desargues' theorem. Jónsson Bjarni), Math. scand., 1954, 2, № 2, 295—314 (англ.)

Как доказал Фринк (Frink, Trans. Amer. Math. Soc., 1946, 60, № 3, 452—467), любая дедекиндова структура B с дополнениями изоморфно вложима в структуру A всех подпространств некоторого проективного пространства в смысле Фринка (множество точек и прямых называется проективным пространством в смысле Фринка, когда: а) две точки определяют одну и только одну прямую, б) если прямая пересекает две стороны треугольника не в его вершине, то она пересекает и третью его сторону). Автор доказывает, что любое тождество, справедливое в B, выполняется и в A. Кроме того, для любой дедекиндовой структуры B с дополнениями доказывается равносильность следующих пяти условий: 1) структура B дезаргова, т. е. в ней справедливо условие (α) (РЖМат, 1954, 5476); 2) структура B изоморфно вложима в структуру коммутативных (т. е. удовлетворяющих равенству $R; S = S; R$ (РЖМат, 1954, 5476)) отношений эквивалентности на некотором множестве; 3) структура B изоморфно вложима в структуру нормальных делителей некоторой группы; 4) структура B изоморфно вложима в структуру подгрупп некоторой абелевой группы; 5) структура B изоморфно вложима в структуру подпространств некоторого дезаргова проективного пространства в смысле Фринка. Приводится пример, показывающий, что в последней теореме наличие у структуры B дополнений существенно.

Л. А. Скорняков

6462. **О вложении частично упорядоченных множеств в структуру. Боттс** (On lattice embeddings for partially ordered sets. Botts Truman), Canad. J. Math., 1954, 6, № 4, 525—528 (англ.)

Пусть P — частично упорядоченное (отношением $<$) множество и $\mathfrak{K}$ — семейство всех таких подмножеств $K \subset P$, что если $x \in P$, $y \in K$ и $y < x$, то $x \in K$. Доказывается, что $\mathfrak{K}$ является полной дистрибутивной структурой (относительно включения) и отображение, переводящее элемент $x \in P$ в множество $K \in \mathfrak{K}$ всех $y > x$, является изоморфным вложением множества P в структуру $\mathfrak{K}$, сохраняющим все точные верхние грани, существующие в P. Возможность вложения (с сохранением точных верхних граней) произвольного частично упорядоченного множества в полную дистрибутивную структуру была ранее доказана при помощи более сложной конструкции Макнилом (MacNeille H. M., Trans. Amer. Math. Soc., 1937, 42, 416—460).

Эта теорема вложения применяется к изучению структуры так называемых «аддитивных топологий», в которых операция замыкания не идемпотентна. Сообщается, что более подробное изложение этого вопроса будет опубликовано позднее.

Для обычных топологий доказывается, что структура всех топологий некоторого множества S не может быть модулярной или дистрибутивной, если S содержит более двух элементов. М. Л. Берлинков

6463. **Дистрибутивность в атомных булевых структурах. Ковальский** (Distributivität in atomaren Booleschen Verbänden. Kowalsky Hans-Joachim), Arch. Math., 1955, 6, № 1, 9—12 (нем.)

Для булевых структур, вообще говоря, не обладающих единицей, доказывается гипотеза Хорна и Тарского об эквивалентности следующих утверждений: 1) булева структура V вполне дистрибутивна в широком смысле; 2) булева структура V является атомной. Для булевых алгебр эта гипотеза была впервые доказана Эномото (РЖМат, 1955, 5658). Е. Г. Шульгейфер

6464. **Замечание о проблеме изоморфизма для свободных алгебраических систем. Фудзивара** (Note on the isomorphism problem for free algebraic systems. Fujiwara Tsuyoshi), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 3, 135—136 (англ.)

Положительно решен вопрос об инвариантности ранга для широкого класса свободных алгебраических систем. Пусть $V = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ — множество операций, A — множество тождеств относительно этих операций и $A(E)$ — свободная алгебраическая система относительно операций V и тождеств A, порожденная множеством свободных образующих $E = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Доказано, что если тождество $x = y$ невыводимо из A и множество E бесконечно, то $A(E) \cong A(F)$ тогда и только тогда, когда мощности множеств E и F равны. Далее, если существует такое множество тождеств A^*, содержащее множество A, что тождество $x = y$ невы-

водимо из A^*, и если из конечности множества E следует конечность алгебраической системы $A^*(E)$, то $A(E) \cong A(F)$ тогда и только тогда, когда мощности множеств E и F равны. Посылкам теоремы 2 удовлетворяют, в частности, свободные структуры, лупы, полугруппы, группы, кольца и т. д. Ю. И. Соркин

6465. Об обобщении прямого произведения частично упорядоченных множеств. Гавель (Poznámka o zobecnění direktního součinu částečně uspořádaných množin. Havel Václav), Mat.-fys. časop., 1955, 5, № 1, 3—10 (словац.; рез. русс.)

Пусть любому элементу b частично упорядоченного множества B отнесено частично упорядоченное множество A_b и пусть для любых элементов $b, b' \in B$ определено изоморфное отображение $\varphi_{bb'}$: $A_b \to A_{b'}$. Пусть, кроме того, в множестве $S = \bigcup_{b \in B} A_b$ определено бинарное отношение r. Рассматриваются следующие условия: P1. xry, где $x, y \in A_b$ ($b \in B$) тогда и только тогда, когда $x < y$. P2. Если $x \leqslant u$; $a' \leqslant y$, где $a \in A_b$, $a' \in A_{b'}$, $b < b'$ и $a' = \varphi_{bb'}(a)$, то xry.

Если $b < b'$, $x \in A_b$, $y \in A_{b'}$, xry, то существует такой элемент $a \in A_b$, что $x \leqslant a$, $a' \leqslant y$ ($a' = \varphi_{bb'}(a)$). $P3_a$. Если $b \neq b'$ и существуют такие элементы $x \in A_b$, $y \in A_{b'}$, что xry, то $b < b'$. $P3_b$. Если $b \neq b'$, то $A_b \cap A_{b'} = \phi$. $P4_a$ ($P4_b$). Если существуют такие элементы $x \in A_b$, $y \in A_{b'}$, что $y \notin A_b$ ($x \notin A_{b'}$) и xry, то $b < b'$.

Доказано, что если выполнены условия P1, P2 и одно из условий $P3_a$, $P4_a$ или $P4_b$, то множество S частично упорядочено отношением E_r ($x E_r y$ тогда и только тогда, когда xry или $x = y$), причем если выполнено условие $P3_a$ или одновременно оба условия $P4_a$ и $P4_b$, то множество S является структурой, если структурами являются множества B и A, где A — любое из множеств A_b. Если выполнено еще условие $P3_b$, то множество S изоморфно кардинальному произведению $A \times B$. Условия P1, P2 и $P3_b$, вообще говоря, недостаточны для того, чтобы отношение E_r являлось частичным упорядочением даже тогда, когда A и B — структуры. M. Kolibiar

6466. Применение логики к алгебре. Хинтикка (An application of logic to algebra. Hintikka K. Jaakko), Math. scand., 1954, 2, № 2, 243—246 (англ.)

Пусть Φ и Ω — некоторые свойства множеств. Утверждается, что если: а) каждая конечная Φ-модель вкладывается изоморфно, т. е. с сохранением Φ-отношений и Φ-свойств, в Φ-Ω-модель; б) каждое конечное подмножество S любой Φ-модели L вкладывается изоморфно, т. е. с сохранением всех Φ-отношений, выполняющихся в S, в конечную Φ-модель; в) свойства Φ и Ω формализуются в узком исчислении предикатов, — то каждая Φ-модель вкладывается изоморфно в Φ-Ω-модель. В частности, любая структура изоморфно вкладывается в полумодулярную структуру.

Следует заметить, что результаты автора легко следуют из теоремы 1 Хенкина (РЖМат, 1954, 5426) и даже неявно содержатся в его статье. Доказательства также следуют идеям Хенкина. Ю. А. Шиханович

6467. Делимостные операции замыкания. Хаусон (Divisibility closure operations. Howson A. G.), J. London Math. Soc., 1954, 29, № 3, 368—373 (англ.)

Пусть S — произвольное множество и cl — определенная на нем операция замыкания. Говорят, что S обладает свойством конечности базиса относительно cl, если каждое замкнутое подмножество из S является замыканием конечного подмножества. Пусть $V(S)$ — множество конечных последовательностей элементов из S. Это множество является полугруппой относительно операции сопоставления (т. е. приписывания одной последовательности за другой). Операция замыкания cl_1, определенная на множестве $V(S)$, называется делимостной операцией замыкания, совместимой с операцией замыкания cl на S, если 1) для любых $X \subseteq S$, $Y \subseteq V(S)$, $x, y \in V(S)$ из $xXy \subseteq Y$ следует, что $x\,\mathrm{cl}(X)\,y \subseteq \mathrm{cl}_1(Y)$, $(xAy = \{xay / a \in A\})$; 2) $v \in \mathrm{cl}_1(u)$ для любой подпоследовательности u последовательности v. Определим на $V(S)$ операцию замыкания cl, положив $\mathrm{Cl}(X) = \bigcap_i \mathrm{cl}_i(X)$, $X \subseteq V(S)$, где cl_i — все делимостные операции замыкания, совместимые с cl. Оказывается, что если определенная на S операция замыкания удовлетворяет условиям: 1) S — обладает свойством конечности базиса относительно cl; 2) для любого элемента $a \in S$ существует только конечное число различных замкнутых множеств, содержащих a; 3) $\mathrm{cl}(x_1) \cap \mathrm{cl}(x_2) \neq 0$, где $x_1, x_2 \in S$, то множество $V(S)$ обладает свойством конечности базиса относительно операции замыкания Cl и всех делимостных операций замыкания, совместимых с cl.

Отсюда, в частности, вытекает следующее утверждение, обобщающее одну теорему Хигмана (Higman Graham, Proc. London Math. Soc., 1952, 2 (3), 326—336): Пусть I — множество целых положительных чисел, cl — операция замыкания на I, определенная формулой $\mathrm{cl}(x_1, x_2, \ldots) = \{a / a = np, n \in I, p = (x_1, x_2, \ldots)\}$. Тогда множество $V(I)$ обладает свойством конечности базиса относительно всех делимостных операций замыкания, совместимых с cl. И. В. Стеллецкий

6468. Об алгебре в топологии. Лесьёр (Sur l'algèbre de la topologie. Lesieur Léonce), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 14, 1464—1466 (франц.)

Произвольная топология в полной булевой алгебре T задается однозначным отображением $a \to V(a)$ алгебры T в полную структуру $\mathfrak{F}$ фильтров этой алгебры, удовлетворяющим следующим условиям: 1) $V(a) \subseteq) a($ (где $(a($ — главный фильтр, порожденный элементом a); $V(0) =)0($; 2) $V(U_\alpha a_\alpha) = \bigcap_\alpha V(a_\alpha)$; 3) Для любого элемента $v \in V(a)$ существует такой элемент $b \in V(a)$, что $v \in V(b)$. В топологии, определенной отображением V, элемент $a \in T$ открыт, если $V(a) =) a($; окрестностями произвольного элемента a являются все элементы фильтра $V(a)$.

Для произвольной дистрибутивной структуры Φ с нулем 0 и единицей u доказывается, что множество элементов $v \in \Phi$, для каждого из которых существует такой элемент x, что $a \cap x = 0$, $x \cup v = u$, образует фильтр $V(a)$, называемый фильтром замкнутых окрестностей элемента a. Отображение $a \to V(a)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$V(a) \subseteq) a(, V(a \cup b) = V(a) \cap V(b), V(0) =) 0(.$$

Отмечается, что в случае, когда Φ есть структура замкнутых элементов топологизированной полной булевой алгебры T, фильтр $V(a)$ замкнутых окрестностей элемента a совпадает с совокупностью всех замкнутых окрестностей элемента a в топологии булевой алгебры T.

В произвольной дистрибутивной структуре Φ с 0 и u два элемента a и b отделены друг от друга, если в Φ существуют такие элементы a' и b', что $a \cap a' = 0$, $b \cap b' = 0$, $a' \cup b' = u$. Для того чтобы элементы a и b дистрибутивной структуры Φ были отделены друг от друга, необходимо и достаточно, чтобы один из них был дизъюнктен в некоторой замкнутой окрестности другого элемента. Если Φ — структура замкнутых элементов топологизированной полной булевой алгебры T, то понятие отделимости двух элементов совпадает

с понятием отделимости двух замкнутых элементов в топологии булевой алгебры T.

В заключение, используя введенное понятие отделимости элементов, автор дает алгебраическую характеристику структур всех замкнутых множеств хаусдорфова пространства T_2, регулярного пространства T_3 и нормального пространства T_4. Е. Г. Шульгейфер

6469 К. Теория алгебр Ли, топология групп Ли (Théorie des algèbres de Lie, topologie des groupes de Lie. Paris, Secrétariat math. école normale supér. 1955, pagination multiple), Bibliogr. France, 1955, 144, № 48, 1066 (франц.)

6470 К. Об алгебре линейных операторов. Шарль (Sur l'algèbre des opérateurs linéaires. Thèse. Charles Bernard. Paris. Gauthier-Villars, 1954, 71 p.), Bibliogr. France, 1954, 143, № 52, 1157 (франц.) См. РЖМат, 1955, 4277.

6471 К. Введение в теорию структур. Хермес (Einführung in die Verbandstheorie. Hermes Hans. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verl., 1955, VI, 164 S., ill., 22.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 11, 589 (нем.)

6472 К. Лекции по теории структур, упорядоченным алгебраическим системам и геометрическим структурам. Дюбрёй-Жакотен, Лесьер, Круазо (Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. Dubreil-Jacotin M. L., Lesieur L., Croisot R. Paris, Gauthier — Villars, 1953, VIII + 385 pp.) (франц.)

В первой части книги излагаются элементы теории структур: частичная упорядоченность; структуры и полуструктуры (обыкновенные и полные); гомоморфизм, дистрибутивные, дедекиндовы и полудедекиндовы структуры, структуры с дополнениями; $\cup$-независимость и ранг. Изложение в основном обычное, однако более детальное, более обстоятельное и менее энциклопедическое, чем в книге Биркгофа (Биркгоф Г., Теория структур, Изд-во ин. лит., М., 1952), к которой читатель отсылается для изучения дальнейших результатов и для ссылок на литературу. От читателя книги требуется лишь незначительное знакомство с элементами современной алгебры. Большое внимание уделяется случаям, в которых лишь одна из операций $\cap$ и $\cup$ предполагается существующей или обладающей специальными свойствами.

Во второй части книги основные результаты применяются к исследованию упорядоченных алгебраических систем. Большую роль при этом играют полуструктурно упорядоченные полугруппы (сокращение не предполагается), называемые «gerbiers». В гл. I этой части изучаются общие свойства групп и группоидов, различным образом упорядоченных, включая такие понятия, как положительные и простые элементы. В гл. II рассматриваются факторсистемы, различные типы мультипликативной замкнутости и архимедовские элементы. Основное внимание сосредоточено на конгруэнциях, включая существование конгруэнций, имеющих определенный вид, на идеалах различных алгебраических систем и на соотношениях между конгруэнциями и идеалами. Гл. V и VI посвящены мультипликативным разложениям элементов и систем; в этих же главах рассматриваются и некоторые другие вопросы, как, например, гомоморфизмы и эквивалентности в смысле Артина.

Последняя часть книги начинается с изучения общих геометрических структур конечной размерности, основных постулатов линейных многообразий (преимущественно рассматривается «закон покрытия» точечно-$\cup$-многообразия) и размерности объединения точек. Затем предположение о конечности размерности отбрасывается. Определяется параллельность и изучается кардинальное произведение. Далее постулируется закон, двойственный закону покрытия, или, что эквивалентно, закон Дедекинда; определяются проективные структуры как естественные обобщения проективной структуры, состоящей из точек и прямых; исследуется вопрос о сведении. Дальнейшее совершенствование постулатов приводит к аффинной геометрии, при этом устанавливаются соответствующие связи между аффинной и проективной геометриями. Плоскость аффинной геометрии является предметом изучения отдельной главы, в которой особое внимание уделяется координатам, движениям и теореме Дезарга. Последняя глава посвящена отношению векторных пространств к аффинным и проективным геометриям, размерности которых превышают два.

Особенностью книги является скрупулезное отношение к деталям и обобщениям. В книге содержится большое число как иллюстрационных примеров, так и примеров, показывающих, что то или иное утверждение неверно, а также тщательно исследуются связи между различными понятиями. Некоторые читатели, особенно читатели с небольшой математической подготовкой, могут найти, что некоторые важные результаты не вытекают из предшествующего и что манера формулировать определения, особенно в первой части книги (см., например, стр. 59—61), приводит в первый момент к путанице. Однако в целом изложение является аккуратным и четким. P. M. Whitman

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 279

6473 Д. Построение областей степени p^n с некоторыми разрешимыми группами Галуа. Дыментберг З. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Белорусс. ун-т, Минск, 1955

6474 Д. Обобщенные полуупорядоченные кольца и их идеалы. Домрачева Г. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1955

6475 Д. Представления полупростых алгебр Ли с двумерными максимальными разрешимыми подалгебрами. Симония В. Т. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тбилис. ун-т, Тбилиси, 1956

См. также: 6313 Д, 6346, 6348, 6349, 6486—6489, 6645 К, 6696, 6792, 6794, 6795, 6822, 6824, 6830 6831, 6832, 6833, 6861—6872, 6885, 6887

ТОПОЛОГИЯ

6476. О свойстве Лебега в равномерных пространствах. III. Исэки (On the property of Lebesgue in uniform spaces. III. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 7, 441—442 (англ.)

Части I и II см. РЖМат, 1956, 5146.

Даются критерии бикомпактности равномерного пространства с помощью понятия свойства Лебега. Например, для того чтобы равномерное пространство E было бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы каждое открытое покрытие пространства E обладало свойством Лебега и каждая непрерывная функция на E достигала своей верхней границы. А. С. Шварц

6477. О представлении нульмерных открытых отображений в виде суперпозиций. Келдыш Люд-

мила, Докл. АН СССР, 1954, 98, № 5, 719—722

Доказано, что всякое нульмерное открытое отображение f компакта размерности $n>0$ на компакт размерности $n+k$, $k>0$, может быть представлено в виде суперпозиции $2k+1$ нульмерных непрерывных отображений: $f=\psi_{k+1}\varphi_k\psi_k\dots\varphi_1\psi_1$, где все ψ_i не повышают размерности, а каждое φ_i двукратно и повышает размерность на единицу. Для известного примера Колмогорова открытого отображения одномерного континуума на двумерный (Ann. Math., 1937, 38, № 1, 36) указанное представление принимает вид $f=\psi\varphi$.

И. А. Вайнштейн

6478. О гомеоморфизмах, регулярных всюду, за исключением конечного числа точек. Хомма, Киносита (On homeomorphisms which are regular except for a finite number of points. Homma Tatsuo, Kinoshita Shin'ichi), Osaka Math. J., 1955, 7, № 1, 29—38 (англ.)

Пусть X — метрическое пространство и h—его гомеоморфное отображение на себя. Точка $p\in X$ называется регулярной при отображении h, если для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из $\rho(p,x)<\delta$ вытекает (при любом целом n) неравенство $\rho(h^n(p),h^n(x))<\varepsilon$. Точка, не являющаяся регулярной, называется иррегулярной. Главная цель статьи состоит в доказательстве следующих теорем:

Теорема I. Пусть X — компактное метрическое пространство, остающееся связным после удаления из него любого конечного множества точек, и h — его гомеоморфное отображение на себя. Если гомеоморфизм h является регулярным во всех точках $x\in X$, за исключением конечного числа точек, то число точек, являющихся иррегулярными при гомеоморфизме h, не более двух.

Теорема II. Пусть X—компактное метрическое пространство, остающееся связным при удалении из него любого конечного числа точек, и h — такое его гомеоморфное отображение на себя, что отображение h иррегулярно в точках $a,b\in X$ и регулярно в каждой точке $x\in X\setminus(a\cup b)$. Тогда или 1) для каждой точки $x\in X\setminus b$ последовательность $h^n(x)$ сходится к a, когда $n\to\infty$, и для каждой точки $x\in X\setminus a$ последовательность $h^n(x)$ сходится к b, когда $n\to-\infty$, или 2) для каждой точки $x\in X\setminus a$ последовательность $h^n(x)$ сходится к b, когда $n\to\infty$ и для всякой точки $x\in X\setminus b$ последовательность $h^n(x)$ сходится к a, когда $n\to-\infty$.

А. С. Пархоменко

6479. К теореме Бореля о покрытии. Цаубек (Ein Beitrag zum Borelschen Überdeckungssatze. Zaubek Othmar), Arch. Math., 1955, 6, № 6, 444—447 (нем.)

Приводятся теоремы, являющиеся обобщением теоремы Бореля о покрытии для общих топологических и метрических пространств, на тот случай, когда элементы покрытия — не обязательно открытые множества. Они получаются как следствие следующей теоремы абстрактной теории множеств:

Теорема о покрытии. Если A — подмножество суммы счетной системы множеств $V_1,V_2,\dots,V_n,\dots$, то A будет подмножеством суммы конечной системы множеств V_k тогда и только тогда, когда для каждого бесконечного множества $U\subset A$ существует по меньшей мере одно такое множество V_l, что пересечение $U\cap V_l$ содержит бесконечное множество элементов.

А. С. Пархоменко

6480. Объемный инвариант накрывающих. Шварц А. С., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 1, 32—34

Порядок роста объема шара, рассматриваемого как функция радиуса, в римановом многообразии, удовлетворяющем условию Шварца, является инфинитезимальным инвариантом, т. е. инвариантен относительно взаимно однозначных и в обе стороны равномерно непрерывных преобразований. Этот инвариант называется объемным инвариантом. Оказывается, что объемный инвариант универсального накрывающего для компактного риманова многообразия является топологическим инвариантом последнего. Автор показывает, что этот инвариант полностью определяется фундаментальной группой данного компактного многообразия. Доказывается, что фундаментальная группа n-мерного компактного риманова многообразия неположительной кривизны не может быть абелевой группой ранга $<n$.

В. А. Ефремович

6481. О некоторых свойствах функций, определенных на уникогерентных континуумах. Гаман, Куратовский (Sur quelques propriétés des fonctions définies sur des continus unicohérents. Haman K., Kuratowski K.), Bull. Acad. polon. sci. Cl. III, 1955, 3, № 5, 243—246 (франц.)

О некоторых свойствах функций, определенных на уникогерентных континуумах. Гаман К., Куратовский К., Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1955, 3, № 5, 239—242

Пусть C — уникогерентный локально связный континуум, в котором определена непрерывная инволюция p^*, т. е. $p^{**}=p$. Если $K\subset C$, то K^* означает множество точек вида p^*, где $p\in K$. Авторы доказывают следующую теорему:

1. Пусть f — вещественная непрерывная функция, определенная в C, и пусть F — множество, образованное всеми точками $p\in C$, для которых $f(p)=f(p^*)$. Тогда существует такой непустой континуум $K\subset C$, что $K^*=K$.

Пусть теперь C — двумерная сфера S_2 и пусть инволюция p^* заменяет каждую точку $p\in S_2$ ее диаметрально противоположной точкой $p^*=p$. Подмножество X сферы S_2 называется антиподным, если $X^*=X$. В этом случае имеет место следующее обращение теоремы 1.

2. Пусть F — замкнутое антиподное подмножество сферы S_2, содержащее непустой антиподный континуум. Тогда существует такая действительная непрерывная функция f, определенная в S_2, что F есть множество всех точек $p\in S_2$, для которых $f(p)=f(p^*)$. Доказательство теоремы 2 основывается на следующей лемме. Любые два антиподальные континууы A и B на S_2 имеют общие точки. Эта лемма вытекает непосредственно из теоремы Эйленберга (Eilenberg S., Fundam. math., 1935, 25, 269).

Авторы, однако, дают другое доказательство. Эта лемма остается справедливой при более общих предположениях, именно: A и B суть связные множества и по крайней мере одно из них замкнуто (или открыто). Авторы показывают на примере, что эти предположения о множествах A и B существенны: существуют два антиподальных множества на S_2, которые связны и разделены.

Теоремы 1 и 2 дают ответ на проблему, предложенную Нейджосом и П. С. Александровым.

J. W. Jaworowski

6482. О политопах. Курепа (Sur les polytopes. Kurepa G.), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1953, 5, № 3—4, 23—31 (франц., рез. серб.)

Доказывается несколько весьма простых предложений о подмножествах конечного множества.

В. А. Ефремович

6483. О двумерных топологических делителях политопов. Косинский А., Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1954, 2, № 3, 329—333

О двумерных топологических делителях политопов. Косинский (On 2-dimensional topological divisors of polytopes. Kosiński A.), Bull. Acad. polon. sci., 1954, 2, № 7, 325—328 (англ.)

Пространство A называется топологическим делителем пространства K, если существует такое пространство B, что топологическое произведение $A \times B$ гомеоморфно K. Основываясь на данной им характеристике полиэдров размерности $\leqslant 2$ (РЖМат, 1956, 2846), автор доказывает, что топологические делители размерности $\leqslant 2$ произвольного (компактного) полиэдра всегда гомеоморфны полиэдрам. Автор замечает, что данное им доказательство дает также возможность утверждать, что топологические делители размерности $\leqslant 2$ открытого подмножества произвольного полиэдра являются всегда локально полиэдрами. Благодаря этому мы получаем следующую теорему: Если расслоенное пространство M с базой B и слоем X является полиэдром и если $\dim B \leqslant 2$ (или $\dim X \leqslant 2$), то B (соответственно X) есть полиэдр. Автор показывает также, что двумерный делитель замкнутого псевдомногообразия всегда является замкнутым псевдомногообразием. K. Borsuk

6484. **О тороидальных когомотопических группах.** Аоки (On torus cohomotory groups. Aoki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 8, 694—697 (англ.)

Дается определение тороидальной когомотопической группы компактной пары, сходное с определением обычных когомотопических групп (Spanier E., Ann. Math., 1949, 50, № 2, 203—245). Следует отметить, что все существенные геометрические леммы изложены автором в предыдущей работе (РЖМат, 1956, 282). С. С. Рышков

6485. **Об одном умножении в теории гомотопий.** Судзуки (A product in homotopy theory. Suzuki Haruo), Tôhoku Math. J., 1954, ser. 2, 6, № 1, 78—88 (англ.)

Пусть Ω — связное пространство с непрерывным умножением, обладающим гомотопической единицей. Любым элементам $\alpha \in \pi_p(\Omega)$, $\beta \in \pi_q(\Omega)$ автор относит элемент $\langle \alpha, \beta \rangle \in \pi_{p+q}(\Omega)$ и доказывает, что при некоторых условиях (эти условия выполнены, например, если умножение в пространстве Ω гомотопически ассоциативно. — *Реф.*) операция $\langle \alpha, \beta \rangle$ удовлетворяет видоизмененному тождеству Якоби.

Пусть Ω — пространство петель над связным пространством X и пусть $T: \pi_p(X) \to \pi_{p+1}(\Omega)$ — изоморфизм Гуревича. Автор доказывает, что изоморфизм T переводит произведение Уайтхеда в произведение, определенное автором. Следовательно, произведение Уайтхеда также удовлетворяет видоизмененному тождеству Якоби. Этот факт был предположен Самельсоном (РЖМат, 1954, 5489) и в последнее время был доказан многими авторами, например Уайтхедом (реф. 6486), что автору, повидимому, осталось неизвестным. Операция $\langle \alpha, \beta \rangle$ фактически содержится уже в работе Самельсона и подробно изучена Уайтхедом (см. указанную выше работу). Однако определение автора по форме отлично от определения Уайтхеда, хотя их эквивалентность (с точностью до знака) устанавливается без труда (в случае, рассмотренном Уайтхедом).
М. М. Постников

6486. **Об отображениях в пространства, сходные с группами.** Уайтхед (On mappings into group-like spaces. Whitehead George W.), Comment. math. helv., 1954, 28, № 4, 320—328 (англ.)

Пусть G — связное пространство с непрерывным умножением, удовлетворяющим с точностью до гомотопии всем групповым аксиомам. Тогда совокупность $\pi(X, G)$ гомотопических классов отображений некоторого пространства X в пространство G является группой (относительно понтрягинского умножения). Пусть пространство X является локально стягиваемым сепарабельным метрическим пространством и пусть либо X триангулируемо, либо G является абсолютным окрестностным ретрактом. Тогда если категория c пространства X конечна, то группа $\pi(X, G)$ нильпотентна, и ее класс нильпотентности меньше c.

В частном случае, когда X является произведением сфер, можно в явном виде построить некоторый центральный ряд группы $\pi(X, G)$, факторы которого оказываются прямыми произведениями гомотопических групп пространства G. В частности, группа $\pi(S^p \times S^q, G)$ оказывается центральным расширением группы $\pi_{p+q}(G)$ с помощью группы $\pi_p(G) \times \pi_q(G)$, причем каждая из групп $\pi_p(G)$, $\pi_q(G)$ (но не их прямое произведение) естественным образом вкладывается в группу $\pi(S^p, \times S^q, G)$. Коммутирование элементов этих групп порождает, следовательно, некоторое спаривание $\langle \alpha, \beta \rangle$ групп $\pi_p(G)$ и $\pi_q(G)$ в группе $\pi_{p+q}(G)$. Фактически это спаривание уже рассматривалось Самельсоном (РЖМат, 1954, 5489).

Спаривание $\langle \alpha, \beta \rangle$ удовлетворяет известному соотношению Якоби, так как в любой группе коммутаторы удовлетворяют этому соотношению по модулю четвертого члена убывающего центрального ряда. С другой стороны, если G есть пространство петель, то известные изоморфизмы Гуревича переводят $\langle \alpha, \beta \rangle$ в произведение Уайтхеда (с точностью до знака). Тем самым доказано, что произведение Уайтхеда удовлетворяет соотношению Якоби, лишь знаками отличающемуся от классического. Этот результат не нов (см., например, РЖМат, 1954, 5489), но изложенное доказательство, повидимому, наиболее просто. Сходное доказательство видоизмененного тождества Якоби предложил Судзуки (реф. 6485). М. М. Постников

6487. **Числа Бетти исключительных групп.** Борель, Шевалле (The Betti numbers of the exceptional groups. Borel A., Chevalley C.), Mem. Amer. Math Soc., 1955, № 14, 1—9 (англ.)

Впервые детально излагается вычисление многочленов Пуанкаре исключительных групп. Для групп G_2, F_4, E_6 и F_7 многочлены Пуанкаре авторы находят с помощью простых арифметических соображений, применяя формулу Хирша к известным подгруппам этих групп максимального ранга. Для группы E_8 приходится исследовать строение инвариантов ее группы Вейля. М. М. Постников

6488. **Заметка о классических группах.** Браун (A note on the classical groups. Browne Marjorie Lee), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 6, 424—427 (англ.)

Изучаются топологические свойства полной линейной группы $GL(n, C)$ над полем комплексных чисел и ее подгрупп: полной линейной группы $GL(n, r)$ над полем вещественных чисел, специальной линейной группы, унитарной группы, ортогональной группы, группы вращений, группы операторов из $GL(n, r)$ с положительным определителем. В частности приводятся различные представления пространства $GL(n, C)$ в виде топологического произведения. Д. А. Супруненко

6489. **О мультикогерентности топологических групп.** Ганя (Zur Multikohärenz topologischer Gruppen. II. Ganea Tudor), Math. Nachr., 1955, 13, № 1—2, 9—18 (нем.)

Продолжение предыдущей работы автора (Math. Nachr., 1952, 7, 323—334). Пусть G — связная, локально связная топологическая группа и $r(G)$ — степень открытой мультикогерентности группы G (Stone A. H., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 66, 389—406). Связное, ло-

кально связное топологическое пространство E называется уникогерентным, если для любых двух таких связных открытых множеств E_1 и E_2, что $E = E_1 \cup E_2$, множество $E_1 \cap E_2$ является связным. Пространство E называется локально уникогерентным, если любая его точка является внутренней точкой некоторого связного локально связного уникогерентного подмножества. Каждая связная локально уникогерентная топологическая группа G имеет когерентную накрывающую группу и $r(G) \leqslant 1$. Пусть E — связное множество, обладающее свойством локальной соединимости дугами. Если в E можно ввести такое непрерывное умножение, что некоторый элемент e будет при этом двусторонней единицей, то $r(E) \leqslant 1$. В частности, это имеет место для топологических групп. Для метрических, компактных, связных, локально связных групп $r(G) \leqslant 1$.

Н. Я. Виленкин

6490. Один класс преобразований плоскости. Хедлунд (A class of transformations of the plane. Hedlund G. A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 4, 554—564 (англ.)

Пусть дана непрерывная вещественная функция $f(x)$ с периодом 2π и положительное число β с иррациональным отношением β/π; тогда формула $\varphi(re^{i\vartheta}) = re^{i(\vartheta+\beta)}$ $(0 < r < \infty)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$ определяет гомеоморфизм φ расширенной комплексной плоскости на себя. Вслед за Безиковичем (Besicovitch A. S., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1951, 47, 38—45) автор изучает строение «орбит» (множеств точек $\{\varphi^n(z)\}_{n=-\infty}^{\infty}$) и их предельных множеств. Доказано, что если

$$I \equiv \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0,\ \sup |S(\vartheta, n)| \equiv \sup \left|\sum_{p=0}^{n} f(\vartheta + p\beta)\right| < \infty$$

$$(-\infty < \vartheta < \infty;\ n = 0, 1, \ldots),$$

то гомеоморфизм φ топологически эквивалентен преобразованию $z' = e^{i\beta}z$; если $I \neq 0$, то φ эквивалентен преобразованию $z' = sz$ $(s > 0,\ s \neq 1)$; если же $I = 0$, $\sup |S| = \infty$, то гомеоморфизм φ транзитивен, т. е. для любых областей U и V существует целое n, для которого $U \cap \varphi^n(V) \neq \Lambda$. Каждый из этих случаев характеризуется возможной структурой орбит, полуорбит и их предельных множеств.

При чтении надо иметь в виду, что автор обозначает одной и той же буквой изучаемый гомеоморфизм и пустое множество.

А. Д. Мышкис

6491 К. Новые топологические методы в алгебраической геометрии. Хирцебрух (Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Hirzebruch F.), Ergebn. Math., 1956, № 9, 165 S.

В книге кратко изложены некоторые понятия современной алгебраической топологии и дано их применение к алгебраической геометрии.

Первая глава содержит обзор основных понятий и некоторые предварительные построения. В § 1 изложен применяемый в дальнейшем алгебраический формализм (т. н. мультипликативные последовательности и, в частности, последовательности Тодда см. РЖМат, 1954, 5090). § 2 посвящен теории пучков (faisceaux). Дано определение пучка и относящихся сюда понятий; а также определение групп когомологий с коэффициентами в пучке. Рассмотрены важные для дальнейшего примеры пучков. В заключение параграфа дано описание групп когомологий над пучками с помощью резольвент пучков. В качестве применения доказана теорема де-Рама.

В § 3 кратко изложена теория косых произведений (в связи с теорией пучков). Наконец, последний параграф первой главы посвящен определению и изучению некоторых свойств черновских и понтрягинских характеристических классов. Черновские классы определены аксиоматически; указано (без доказательств), что их можно определить также с помощью препятствий. Понтрягинские классы определяются через черновские. Указана связь между действительными понтрягинскими и черновскими классами квазикомплексного многообразия (эти результаты прямым путем получены В. И. Бурдиной, РЖМат, 1955, 2606).

Вторая глава (§§ 5—9) содержит построение алгебры Тома (правильнее: Тома — Рохлина.—*Реф.*). Считая два многообразия эквивалентными, если все их понтрягинские числа совпадают, мы разобьем множество n-мерных ориентированных многообразий на классы эквивалентности, совокупность которых обозначается через $\tilde{\Omega}^n$; $\tilde{\Omega}^n$ представляет собой группу относительно операции объединения многообразий. Относительно топологического перемножения группа $\tilde{\Omega} = \Sigma_n \tilde{\Omega}^n$ является градуированной коммутативной алгеброй без кручений. Алгебре $\Omega \otimes Q$ можно дать чисто геометрическое описание с помощью алгебры $\Omega = \Sigma_0^{\infty} \Omega^n$ внутренних гомологий (РЖМат, 1953, 1123). Как было показано Л. С. Понтрягиным, все понтрягинские числа гладко ограничивающего многообразия равны нулю, благодаря чему возникает естественное эпиморфное (т. е. «гомоморфное на») отображение $\varphi: \Omega \to \tilde{\Omega}$. Из результатов Тома (РЖМат, 1953, 143, 1124) вытекает, что отображение $\varphi \otimes 1: \Omega \otimes Q \to \tilde{\Omega} \otimes Q$ изоморфно. Пусть $K = \{K_j\}$ — мультипликативная последовательность многочленов, M^{4r} — ориентированное многообразие, размерность которого кратна четырем, а $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — его понтрягинские классы. Тогда $K_r(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ есть $4r$-мерный класс когомологий многообразия M^{4r}; его индекс называется K-родом многообразия M^{4r}. В алгебре $\tilde{\Omega} \otimes Q$, где Q — поле рациональных чисел, каждый K-род является гомоморфизмом колец $\tilde{\Omega} \otimes Q \to Q$ и обратно.

Сигнатура (индекс инерции) $\tau(M^{4k})$ билинейной формы $x \smile y$ $(x, y \in H^{2k}(M^{4k}, R)$, где R — поле действительных чисел) аддитивна и мультипликативна, т. е. определяет гомоморфизм $\tilde{\Omega} \otimes Q \to Q$. Из этого следует, что сигнатура является K-родом при некотором выборе мультипликативной последовательности K (эта мультипликативная последовательность указана автором; см. также РЖМат, 1954, 5090) и потому выражается через понтрягинские классы. Глава заканчивается рассмотрением вопроса об индексах инерции подмногообразий.

В главе 3 определяется и изучается тоддовский род квазикомплексного многообразия и обобщение этого рода. Для любой мультипликативной последовательности K и квазикомплексного многообразия M_n определяется K-род многообразия M_n (так же как и во второй главе, но с заменой понтрягинских чисел черновскими). В частности, тоддовские и обобщенные тоддовские многочлены позволяют определить тоддовский и обобщенный тоддовский род квазикомплексного многообразия. Для значений параметра, равного 1, обобщенный тоддовский род совпадает с сигнатурой.

Последняя глава посвящена обобщению теоремы Римана — Роха и представляет собой подробное изложение результатов автора (РЖМат, 1955, 5260). Одним из основных результатов является теорема о совпадении тоддовского и арифметического рода алгебраического многообразия. Кроме того, кратко изложены закон двойственного Серра, некоторые результаты Кодаира и других авторов (см. РЖМат, 1955, 5260).

Автор не указывает ни в тексте, ни в библиографии ни одной работы советских авторов. Отметим, что основной результат о совпадении тоддовского и арифметического рода легко следует из работы Р. В. Гамкрелидзе (РЖМат, 1954, 2601). В. Г. Болтянский

6492 К. **Общая топология. Келли** (General topology. Kelley John L. Van Nostrand, 1955, 298 pp., 8.75 doll.), Cumul. Book Index, 1955, **58**, № 6, 62 (англ.)

6493 К. **Алгебраическая топология. Семинар Картана. 1948—1949** (Topologie algébrique. Séminaire Henri Cartan. 1948—1949. 2 éd., Paris, Secrétariat math. école normale supér. 1955, pagination multiple), Bibliogr. France, 1955, **144**, № 48, 1066 (франц.)

См. также: 6323, 6419, 6468, 6504 К, 6524, 6810, 6816, 6818, 6823

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

6494. **О продолжении неархимедовой конечноаддитивной меры с конечноаддитивной алгебры Буля на более широкую алгебру. I. «Концы» в цепи. Никодим** (Sur l'extension d'une mesure non Archimédienne, simplement additive sur une tribu de Boole simplement additive, à une autre tribu plus étendue. I. Les «bouts» dans une chaîne. Nikodým Otton Martin), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 21, 1439—1440 (франц.)

Цепь (M) есть множество M, в котором установлено рефлексивное и транзитивное отношение $\leqslant$ такое, что для всяких двух элементов $a, b \in M$ или $a \leqslant b$, или $b \leqslant a$. Формула $a = b$ означает, что $a \leqslant b, b \leqslant a$. Формулы 1) $E \cdot \leqslant F$; 2) $E \leqslant \cdot F$; 3) $E \cdot = F$; 4) $E = \cdot F$ для непустых $E \subset M$, $F \subset M$ означают соответственно: 1) для всякого $y \in F$ существует $x \in E$ с $x \leqslant y$; 2) для всякого $x \in E$ существует $y \in F$ с $x \leqslant y$; 3) $E \cdot \leqslant F$, $F \cdot \leqslant E$; 4) $E \leqslant \cdot F$, $F \leqslant \cdot E$. Левым концом $\mathscr{AB}(E)$ (правым концом $\mathscr{BB}(E)$) множества $E \subset M$ называется класс всех $A \subset M$ с $A \cdot = E$ ($A = \cdot E$). Левые (правые) концы обозначаются через $^*\alpha, ^*\beta, \ldots (\alpha^*, \beta^*, \ldots)$. Формулы: 1′) $^*\alpha \leqslant {}^*\beta$; 2′) $\alpha^* \leqslant \beta^*$; 3′) $\alpha^* \leqslant {}^*\beta$; 4′) $^*\alpha \leqslant \beta^*$ означают соответственно: 1′) $E \cdot \leqslant F$ для $E \in {}^*\alpha$; $F \in {}^*\beta$; 2′) $E \leqslant \cdot F$ для $E \in \alpha^*$, $F \in \beta^*$; 3′) для любых $E \in \alpha^*$, $F \in {}^*\beta$, $x \in E$, $y \in F$ имеем $x \leqslant y$; 4′) существуют такие $E \in {}^*\alpha$, $F \in \beta^*$, что $x \leqslant y$ для любых $x \in E$, $y \in F$. Этим совокупность всех концов превращается в цепь. Если $E \subset M$ имеет минимум (максимум) a, то $\mathscr{AB}(E)$ ($\mathscr{BB}(E)$) обозначается через a.

В случае, когда (M) есть линейно упорядоченная абелева группа с линейно упорядоченным телом Ф мультипликаторов, для концов даются нижеследующие определения сложения, вычитания и умножения на мультипликаторы: $^*\alpha + {}^*\beta$ есть $\mathscr{AB}(\{a+b \mid a \in E, b \in F\})$, где $E \in {}^*\alpha$, $F \in {}^*\beta$; $\lambda^*\alpha$ с $\lambda \geqslant 0$ есть $\mathscr{AB}(\{\lambda a \mid a \in E\})$; $\alpha^* + \beta^*$ и $\lambda\alpha^*$ с $\lambda \geqslant 0$ определяются аналогично; $\lambda^*\alpha$ с $\lambda \leqslant 0$ есть $\mathscr{BB}(\{\lambda a \mid a \in E\})$; $-^*\alpha$ есть $\mathscr{BB}(\{-a \mid a \in E\})$; $\alpha^* - {}^*\beta$ есть $\alpha^* + (-^*\beta)$. Отмечаются свойства этих операций: сложение коммутативно и ассоциативно; $(\lambda + \mu)\,^*\alpha = \lambda\,^*\alpha + \mu\,^*\alpha$; $\lambda\,(^*\alpha + {}^*\beta) = \lambda\,^*\alpha + \lambda\,^*\beta$; $\lambda(\mu\,^*\alpha) = (\lambda\mu)\,^*\alpha$; если $^*\alpha \leqslant {}^*\beta$, $\lambda \geqslant 0$, то $\lambda\,^*\alpha \leqslant \lambda\,^*\beta$.

В. А. Рохлин

6495. **О продолжении неархимедовой конечноаддитивной меры с конечноаддитивной алгебры Буля на более широкую алгебру. II. «Агрегаты» и их норма. Никодим** (Sur l'extension d'une mesure non archimédienne, simplement additive sur une tribu de Boole simplement additive, à une autre tribu, plus étendue. II. «Agrégats» et leur norme. Nikodým Otton Martin), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 22, 1544—1545 (франц.)

Пусть (Φ) — линейно упорядоченное тело с элементами $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ и (B) — булева алгебра с элементами $a, b, \ldots$ $B\Phi$-агрегатом называется линейная форма вида $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, где $a_i \in B$, $\lambda_i \in \Phi$, $a_1 + \ldots + a_n = 1$, $a_i a_k = 0$ $(i \neq k)$; по определению, $\sum_i \lambda_i a_i = \sum_j \nu_j b_j$, если $\lambda_i = \nu_j$ всякий раз, как $a_i b_j \neq 0$. Сумма $\sum_i \lambda_i a_i + \sum_j \nu_j b_j$ и произведение $\lambda \sum_i \lambda_i a_i$ определяются соответственно как $\sum_{ij} (\lambda_i + \mu_j) a_i b_j$ и $\sum_i (\lambda\lambda_i) a_i$.

На (B) предполагается заданной конечноаддитивная мера $\mu(a)$ со значениями в Ф. Положим $E_a = \{\mu(x) \mid x \subseteq a\}$ для $a \in B$. Определим, пользуясь обозначениями предыдущей заметки (реф. 6494), нижнюю меру $^*\mu(a)$ (верхнюю меру $\mu^*(a)$) как конец $\mathscr{AB}(E_a)$ ($\mathscr{BB}(E_a)$), и вариацию $\bar{\mu}^*(a)$ как $\mu^*(a) - {}^*\mu(a)$. Если $ab = 0$, то $\bar{\mu}^*(a+b) = \bar{\mu}^*(a) + \bar{\mu}^*(b)$.

Пусть теперь (B) есть подалгебра алгебры (B') с теми же 0 и 1. Положим для $B'\Phi$-агрегата $X = \sum_i \lambda_i A_i$ и разложения $\{a_k\}$ единицы в B $(a_1 + \ldots + a_n = 1$, $a_k a_l = 0$ при $k \neq l)$:

$$H^*(\{a_k\}, X) = \sum_k \bar{\mu}^*(a_k) \max_{a_k A_i \neq 0} |\lambda_i|$$

и рассмотрим множество $H(X)$ всех таких концов $H^*(\{a_k\}, X)$ с фиксированным X. Итерированный конец $^*q(X) = \mathscr{AB}(H(X))$ называется нормой $B'\Phi$-агрегата X относительно (B) и μ. Если $\lambda \geqslant 0$ и Y — другой $B'\Phi$-агрегат, то $^*q(\lambda X) = \lambda\,^*q(X)$ и $^*q(X+Y) \leqslant {}^*q(X) + {}^*q(Y)$.

В. А. Рохлин

6496. **О продолжении неархимедовой конечноаддитивной меры с конечноаддитивной алгебры Буля на более широкую алгебру. III. Продолжение меры. Никодим** (Sur l'extension d'une mesure non archimédienne, simplement additive sur une tribu de Boole simplement additive, à une autre tribu, plus étendue. III. Extension de mesure. Nikodým Otton Martin), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 24, 1695—1696 (франц.)

Пусть (B') — конечноаддитивная булева алгебра; (B) — ее подалгебра с теми же 0 и 1; (Φ) — линейно упорядоченное тело, полное в том смысле, что, каковы бы ни были его непустые подмножества E, F такие, что при $e \in E$, $f \in F$ всегда $e \leqslant f$, существует элемент $\rho \in \Phi$, удовлетворяющий условию: $e \leqslant \rho \leqslant f$ для любых $e \in E$, $f \in F$; μ — конечноаддитивная мера на (B) со значениями в Ф. Доказывается, что при этих условиях на (B') существует конечноаддитивная мера μ' со значениями в Ф, совпадающая на (B) с μ. Доказательство использует обобщение теоремы Хана — Банаха и конструкции двух предыдущих заметок (реф. 6494, 6495).

Утверждается, что эти конструкции позволяют доказать для всякой конечноаддитивной булевой алгебры существование (вообще говоря, неархимедовой) меры, неотрицательной и обращающейся в нуль лишь в нуле.

В. А. Рохлин

6497. **Об интеграле энергии теории потенциала. Иномия** (Sur l'intégrale d'énergie dans la théorie du potentiel. Ninomiya Nobuyuki), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1954, A4, № 2, 97—100 (франц.)

Пусть μ — некоторое распределение масс в m-мерном пространстве $(m \geqslant 2)$; $\Phi(r)$ $(0 < r < \infty)$ — непрерывная положительная функция с $\lim_{r \to 0} \Phi(r) = \infty$, $\int_0^1 \Phi(r)\, r^{m-1}\, dr < \infty$. Обобщенный Ф-потенциал определяется как интеграл Стилтьеса $U^{\mu}(M) = \int \Phi(MQ)\, d\mu(Q)$. Если интеграл энергии (когда он существует) $I(\mu) = \int U^{\mu}(p)\, d\mu(P)$ неотрицателен (положителен) для всякого распределения $\mu \not\equiv 0$, то ядро $\Phi(r)$ называется ядром положительного типа (удовлетворяющим принципу энергии). Доказываются теоремы: Для того чтобы ядро $\Phi(r)$ было положительного типа (удовлетворяло принципу энергии), необходимо и достаточно, чтобы для всякой пары положительных мер μ и ν с компактными носителями и $I(\mu) < \infty$, $I(\nu) < \infty$ из неравенства $U^{\mu}(M) \leqslant U^{\nu}(M)$ почти везде по μ на носителе μ следовало бы такое же неравенство (строгое неравенство) хотя бы в одной точке носителя ν (на множестве положительной меры по ν). Х. Л. Смолицкий

6498. **Об одном условии непрерывности функции многих переменных. Пикус Д. Л.**, Уч. тр. Пятигор. гос. пед. ин-та, 1955, 8, 3—12

Доказывается, что для непрерывности функции $f(\eta)$ в n-мерном сегменте π необходимо и достаточно, чтобы $f(\eta)$ была непрерывной на каждой непрерывной поверхности размерности $k \leqslant n-1$, содержащейся в π. Показано, что для непрерывности $f(\eta)$ в π недостаточно ее непрерывности на каждой алгебраической поверхности размерности $k \leqslant n-1$, содержащейся в π. Для $n=2$ эти утверждения приведены в учебнике Н. Н. Лузина «Теория функций действительного переменного».

А. Я. Дубовицкий

6499. **Условия (T) Банаха для функций двух переменных. Маркус** (Condiţiile (T) ale lui Banach la funcţii de două variabile. Marcus S.), Rev. Univ. «C. I. Parhon» şi Politehn. Bucureşti. Ser. ştiinţ. natur., 1955, № 8, 15—22 (рум.; рез. русс., франц.)

Доказывается ряд теорем, обобщающих некоторые теоремы Адельсон-Вельского и Кронрода (Кронрод А. С., Успехи матем. наук, 1950, 5, № 1, 35). Например:

1. Если почти все функции $f(x_0, y)$ и $f(x, y_0)$ удовлетворяют условию Банаха, то значения, принимаемые функцией $t = f(x, y)$ в точках локальной несвязности компонент множеств уровня, составляют множество меры нуль на оси t.

2. Если при предыдущих условиях $f(x, y)$ непрерывна по каждому из аргументов, то почти для каждого t множество точек уровня t, в которых $f(x, y)$ не имеет частных производных (конечных или бесконечных), проектируется на оси x и y в множества меры нуль.

3. Пусть при предыдущих условиях $f(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов в единичном квадрате. Тогда на отрезке $[\inf f, \sup f]$ существует такое множество T полной меры, что для любых $t \in T$ и $\eta_0 (x_0, y_0) \in E_t$ существуют окрестность $V(\eta_0)$ и функции $u(\lambda)$, $v(\lambda)$, непрерывные для $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, для которых: а) $f(x, y) = t$ допускает решение $x = u(\lambda)$, $y = v(\lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $[(u(\lambda), v(\lambda)] \in V(\eta_0)$; б) существует $0 < \lambda_0 < 1$, для которого $x_0 = u(\lambda_0)$, $y_0 = v(\lambda_0)$. Функции $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$, обладающие такими свойствами, единственны.

Р. С. Гутер

6500. **Обобщенная формула Грина и ее следствия. Кафьеро** (Un'estensione della formula di Green e sue conseguenze. Cafiero Federico), Ricerche mat., 1953, 2, № 1, 91—103 (итал.)

Рассматриваются функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, непрерывные в замкнутой прямоугольной области Δ. Функция $u(x, y)$ почти для всех y имеет обычную частную производную по x и почти для всех x асимптотическую производную по y; $v(x, y)$ — аналогичные производные по y и по x. Каждому прямоугольнику $R \subset \Delta$ с границей $\mathscr{T}R$ ставится в соответствие интеграл $\psi(R) = \int_{\mathscr{T}R} u\, dx + v\, dy$. Тогда функция $\psi(R)$ почти для всех точек $P \in \Delta$ обладает симметрической асимптотической производной, причем $\psi'(P) = v'_x - u'_y$, где штрихи означают асимптотические производные.

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ ограничены в Δ и имеют в каждой точке конечные частные производные числа. Для того чтобы $\psi(R)$ была абсолютно непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы разность $v'_x - u'_y$ была конечна почти всюду и суммируема. Если эти условия выполнены, то, кроме того,

$$\int_{\mathscr{T}R} u\, dx + v\, dy = \iint_R (v'_x - u'_y)\, dx\, dy$$

для всех прямоугольников $R \subset \Delta$. Р. С. Гутер

6501. **Об условиях справедливости общей формулы Грина — Стокса. Аруффо** (Sulle condizioni di validità della formula di Green — Stokes generale. Aruffo Giulio), Richerche mat., 1954, 3, № 2, 189—201 (итал.)

Рассматривается k-мерный параллелепипед в n-мерном пространстве, грани которого параллельны координатным осям. Доказывается теорема Стокса для дифференциального выражения, удовлетворяющего некоторым специальным условиям. Р. С. Гутер

6502. **Некоторые достаточные условия существования асимптотического дифференциала. Пламеннов И. Я.**, Докл. АН СССР, 1955, 105, № 3, 416—418

Изучаются условия существования аппроксимативного дифференциала для функций двух переменных (определение см. Сакс С., Теория интеграла, М., 1949). Верхняя и нижняя плотности множества E по углу $S(M)$ с вершиной в точке M определяются как верхний и нижний пределы отношения $|E \cdot S(M, r)| / |S(M, r)|$ при $r \to 0$, где $S(M, r)$ — сектор радиуса r.

Теорема 1. Пусть $F(M)$ — почти всюду конечная измеримая функция на плоском измеримом множестве E. Пусть далее $P \subset E$ таково, что для точек $M \in P$ выполнены следующие условия:

1) существуют угол $S(M)$ и множество $E_M \subset E$ такие, что нижняя плотность множества E_M в точке M по углу $S(M)$ больше $1/2$:

2)

$$\lim_{\rho(M, N) \to 0} \sup_{N \in E_M} \frac{F(N) - F(M)}{\rho(M, N)} < +\infty$$

или

$$\lim_{\rho(M, N) \to 0} \inf_{N \in E_M} \frac{F(N) - F(M)}{\rho(M, N)} > -\infty.$$

Тогда $F(M)$ почти всюду на P аппроксимативно дифференцируема.

Приведены без доказательства другие такого же характера теоремы. Изучается строение произвольной измеримой функции в окрестностях точек, в которых не существует аппроксимативного дифференциала.

А. Г. Джваршейшвили

6503. **О компактности и замкнутости поверхностей конечной площади, непрерывных или других, и об**

обобщенных поверхностях. Янг (On the compactness and closure of surfaces of finite area, continuous or otherwise, and on generalized surfaces. Young L. C.), Rend. Circ. mat. Palermo, 1953, 2, № 1, 106—118 (англ.)

Рассматривается отображение $f(w)$ единичного квадрата R плоскости $w=u+iv$ в n-мерное евклидово пространство. Подмножеству $W\subset R$ ставятся в соответствие функции $I(W,f)=\frac{1}{2}\iint_W (f_u^2+f_v^2)\,du\,dv$ и $a(W,f)=\iint_W [f_u^2 f_v^2-(f_u f_v)^2]^{1/2}\,du\,dv$. Пусть $N>0$ фиксировано. Функцию $f(w)$ называют обобщенным представлением Дирихле (N), если: а) она абсолютно непрерывна по v вдоль почти всех прямых $u=\text{const}$ и по u вдоль почти всех прямых $v=\text{const}$; б) она непрерывна на периметре P квадрата R; в) $I(R,f)<N$. Слово «обобщенное» опускается, если $f(w)$ непрерывна, и заменяется словом «специальное», если, кроме непрерывности f, имеем $\mu(R-P,f)=a(R,f)$, где μ означает площадь в смысле Банаха. При тех же условиях говорят о представлении Дирихле ($N+$), если $I(R,f)\leqslant N$.

Последовательность $\{f_n\}$ обобщенных представлений Дирихле (N) называется сходящейся в смысле Б. Леви к функции g, если существуют такие плотное множество U значений u и множество V значений v, что для каждых $u_0\in U$, $v_0\in V$ имеем: 1) $f_n\to g$ в u_0+iv_0, 2) f_n абсолютно непрерывны по u при $v=v_0$ и по v при $u=u_0$ и интегралы вдоль этих отрезков от f_{uv}^2 и f_{uu}^2 соответственно равномерно ограничены.

Пусть $f(w)$ и $h(w)$ принадлежат обобщенному представлению Дирихле (N) и $\varepsilon>0$. Существует ε-переход от f к h, если существует открытое $W\subset R$, для которого $f=h$ на $R-W$ и $\max\{|W|,a(W,h)\}<\varepsilon$; если, кроме того, $a(W,f)<\varepsilon$, то ε-переход называется обратимым.

Доказываются следующие теоремы:

1) Пусть $f(w)$ — обобщенное представление Дирихле (N) и $h(w)$ — гармоническая в $R-P$, непрерывная в R и равная $f(w)$ на P. Тогда $I(R,h)\leqslant I(R,f)$.

2) Пусть $\{f_n\}$ — последовательность обобщенных представлений Дирихле (N). Существует подпоследовательность, сходящаяся в смысле Б. Леви к обобщенному представлению Дирихле ($N+$). Для каждого $\varepsilon>0$ существует последовательность $\{g_n\}$ специальных представлений Дирихле (N) с ε-переходом от f_n к g_n, равномерно сходящаяся на R к специальному представлению Дирихле ($N+$), причем существует ε-переход от одной предельной функции к другой.

3) Если $f(w)$ — обобщенное представление Дирихле (N), то для всякого $\varepsilon>0$ существует обратимый ε-переход к специальному представлению Дирихле (N).

Вводится понятие обобщенной поверхности, под которой понимается неотрицательный линейный функционал над некоторым функциональным пространством (элементы которого суть подинтегральные выражения в параметрической вариационной задаче). Рассматривается ряд свойств обобщенных поверхностей, которые будут использованы в дальнейшем. Р. С. Гутер

6504 К. Действительные функции. Аумann (Reelle Funktionen. Aumann Georg. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Bd LXVIII. Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1954, VIII + 416 S., 59.60 DM) (нем.)

В гл. 1 излагается общая теория множеств с обычной для математиков (не аксиоматической) точки зрения. Описываются основные теоретико-множественные операции и устанавливаются обозначения; рассматриваются счетные множества и множества мощности континуума. Гл. 2 длинней и содержательней, ее тема — общее понятие (частичного) порядка. Она включает теорию пополнения с помощью сечений Мак-Нила, просто упорядоченные множества, характеристику множества действительных чисел как полного упорядоченного поля, вполне упорядоченные множества, лемму Цорна и теорему о полном упорядочении, порядковые и кардинальные числа, операции Бореля и Суслина и теорию сходимости функций по направленным множествам. Гл.-3 посвящена структурам и булевым алгебрам; она включает доказательства теорем представления, связанных с именами Стоуна и Лумиса. Гл. 4 трактует некоторые топологические понятия. В дополнение к обычным основным понятиям (замыкание, плотность, компактность) изучаются булевы алгебры так называемых регулярных открытых множеств, кривые Пеано, характеризация топологии посредством сходимости, и множества, обладающие свойством Бэра.

В следующих трех главах больше внимания уделяется теории функций действительного переменного. В гл. 5, например, определяются нормальные пространства и рассматривается проблема метризации. В этой главе трактуются также полунепрерывные функции и функции Бэра, доказывается теорема Стоуна — Вейерштрасса, устанавливается теорема о неподвижной точке для оператора сжатия в полном метрическом пространстве и применяется к теореме о неявной функции, доказывается теорема Брауэра о неподвижной точке и применяется к n-мерному обобщению теоремы Больцано о промежуточном значении. В гл. 6 рассматривается метрика в декартовом произведении метрических пространств и связь между непрерывностью по отдельным переменным и по совокупности переменных. Гл. 7 трактует теорию дифференцирования и интегрирования действительной функции одного действительного переменного. Изучаются ограниченная вариация и абсолютная непрерывность (дифференцируемость почти всюду монотонной функции устанавливается методом Рисса); теории интегрирования Перрона, Римана, Лебега и Стилтьеса и доказывается основная теорема интегрального исчисления.

Две последние главы посвящены абстрактным мерам и интегралам. Теория меры систематически излагается в 8-й главе с булево-алгебраической точки зрения. Изложение включает обобщенную теорию интегрирования Беркилла. Абстрактное интегрирование появляется в гл. 9 (название которой «Положительные линейные функционалы»); изложение (включающее теорему Радона — Никодима и теорему Фубини) полностью следует направлению, развитому Стоуном.

Хотя в принципе книга независима от других источников, студенту следует рекомендовать ее для изучения только, если он более обычного серьезно занимался вычислениями. Книга содержит много ценного материала в относительно малом объеме.

P. R. Halmos

Из Math. Revs, 1954, 15, № 10 859.

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

6505. Некоторые принципы индукции. Курепа (Some induction principles. Kurepa G.), Bull. scient. Conseil acad. RPFY, 1955, 2, № 3, 81 (англ.)

Перепечатано из Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 130 (РЖМат, 1955, 4334).

6506. **О монотонном семействе разложимых множеств. Тугуэ** (Sur la famille monotone d'ensembles développables. Tugué Tosiyuki), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 8, 691—693 (франц.)

Дается обобщение основного результата, изложенного в работе автора и Окуяма (РЖМат, 1955, 4335). Пусть E — множество r-мерного евклидова пространства. Для всякого порядкового числа $\alpha\,(\alpha<\Omega)$ определяются множества $R_\alpha(E)$ следующим образом: 1) $R_0(E)=E$; 2) $R_\alpha(E)=\overline{R_{\alpha_1}(E)}-R_{\alpha_1}(E)$, если $\alpha=\alpha_1+1$, $R_\alpha(E)=\Pi_{\xi\in\Lambda(\alpha)}R_\xi(E)$, если α второго рода. Здесь $\Lambda(\alpha)$ есть множество всех четных порядковых чисел, меньших α.

Известно, что если E разложимо, то существует порядковое число β такое, что $R_\beta(E)=0$ и $R_\alpha(E)\neq 0$ для $\alpha<\beta$, при этом множество E может быть единственным образом разложено в ряд убывающих замкнутых множеств

$$E=\overline{E}-\overline{(\overline{E}-E)}+\overline{\left[\overline{(\overline{E}-E)}-(\overline{E}-E)\right]}+\ldots$$
$$\ldots+\overline{R_\alpha(E)}-\overline{R_{\alpha+1}(E)}+\ldots$$

Число β для разложимого множества E обозначается через $i(E)$.

Для монотонного семейства F разложимых множеств образуется множество $[F]$ подсемейств $F_E^{(\alpha)}$, $E\in F$, $\alpha\leqslant i(E)$, семейства F следующим образом: $F_E^{(1)}$ есть совокупность множеств X таких, что $X\in F$ и $\overline{X}=\overline{E}$; $F_E^{(\alpha)}$ есть совокупность множеств X таких, что $X\in F_E^{(\alpha_1)}$, $\overline{R_{\alpha_1}(X)}=\overline{R_{\alpha_1}(E)}$, если $\alpha=\alpha_1+1$, и $F_E^{(\alpha)}=\Pi_{\xi<\alpha}F_E^{(\xi)}$, если α второго рода.

Через G обозначается совокупность таких $F_E^{(\alpha)}$, что $\overline{F_E^{(\alpha)}}\in[F]$ и мощность $F_E^{(\alpha)}$ больше единицы.

Доказывается ряд лемм, из которых выводится теорема: Для того чтобы монотонное семейство F разложимых множеств представляло линейный тип, необходимо и достаточно, чтобы G была не более чем счетной.

В. Я. Арсенин

6507. **Обоснование теории механизмов при помощи теории множеств. Калицин** (Die Begründung der Getriebelehre durch die Mengenlehre. Kalitzin G. St.), Acta techn. Acad. sci. hung., 1955, 11, № 3—4, 441—448 (нем.; рез. русс., англ., франц.)

Автор пользуется рядом понятий и некоторыми терминами теории множеств при рассмотрении кинематических цепей и механизмов; например, вводятся такие понятия как множество перемещений всех точек звена, диаметр множества, расстояние между двумя множествами и т. д. Из приведенного автором примера—нахождение диаметра множества положений поршня в поршневом двигателе — неясно, какую пользу для теории механизмов может принести применение понятий теории множеств.

Я. Л. Геронимус

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

6508. **Равномерная сходимость некоторых тригонометрических рядов. Хирокава** (Uniform convergence of some trigonometrical series. Hirokawa Hiroshi), Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 2—3, 162—173 (англ.)

Обобщаются некоторые критерии для равномерной сходимости тригонометрических рядов, доказанные Суноути, Идзуми и др. (см., например, РЖМат, 1954, 5640).

Теорема 1. Если $0<\alpha<1$, $\beta>0$ и

$$\sum_{n=k}^{\infty}|\Delta a_n|=O(k^{-\alpha}),\ t_k^\beta=o(k^{\beta\alpha}),$$

где t_k^β являются (C,β)-суммами последовательности $\{ka_k\}$, а $\Delta a_k=a_k-a_{k+1}$, то ряд $\Sigma_1^\infty a_n\sin nx$ сходится равномерно на $[0,\pi]$.

Теорема 3. Если $0<\alpha<1$, $\beta>0$ и

$$\sum_{n=k}^{\infty}|\Delta a_n|=O(k^{-\alpha}),\ \tau_k^{\beta-1}=o(k^{\alpha\beta-1}),$$

где $\tau_k^{\beta-1}$ являются $(C,\beta-1)$-суммами последовательности $r_k=\Sigma_{n=k}^\infty a_n$, то ряд $\Sigma_1^\infty a_n\sin nx$ сходится равномерно на $[0,\pi]$.

Аналогичного типа теоремы доказываются и для рядов $\Sigma_1^\infty a_n\cos nx$. Полученные результаты для тригонометрических рядов применяются автором для нахождения критериев суммируемости (в определенных смыслах) числовых рядов. В статье много опечаток.

П. Л. Ульянов

6509. **О сильной суммируемости продифференцированных рядов Фурье. II. Идзуми, Кинукава** (On the strong summability of the derived Fourier series. II. Izumi Shin-ichi, Kinukawa Masakiti), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 3, 107—110 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1956, 1231.

Пусть $f(t)$ — непрерывная функция с ограниченной вариацией и с периодом 2π, $\tau_n(t)$ — частные суммы продифференцированного ряда Фурье этой функции. Положим

$$g_x(u)=f(x+u)-f(x-u)-2us.$$

Доказывается теорема: Если для точки x

$$\int_0^t|dg_x(u)|=O\{t(\log t^{-1})^{-\alpha}\}\quad(t\to 0),$$

где $\alpha>1/2$, то $\lim_{n\to\infty}n^{-1}\Sigma_{\nu=1}^n|\tau_\nu(x)-s|^2=0$.

Без доказательства приводится теорема: Если для точки x $\int_0^t|dg_x(u)|=o(t)$, то

$$\sum_{\nu=1}^n|\tau_\nu(x)-s|^2=o(n\log n).$$

А. А. Шнейдер

6510. **О риссовской логарифмической суммируемости сопряженного продифференцированного ряда Фурье. I. Кинукава** (On the Riesz logarithmic summability of the conjugate derived Fourier series. I. Kinukawa Masakiti), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 3, 121—125 (англ.)

Наряду с рядом Фурье

$$f(x)\sim a_0/2+\sum_{n=1}^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

функции $f(x)$ периода 2π рассматривается ряд

$$\sum_{n=1}^\infty n(a_n\cos nx+b_n\sin nx).\qquad(1)$$

Положим

$$\varphi(t)=\{f(x+t)+f(x-t)-2s\cos t\}/2,$$

$$g(t)=g_0(t)=\int_t^\infty\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du,$$

$$g_\alpha(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\pi\left(\log\frac{u}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{g(u)}{u}\,du\quad(\alpha>0)$$

предполагается, что $\varphi(t)/t$ интегрируема на $(0,\infty)$). Будем писать

$$\lim_{t\to 0} g(t)=0\ (R,\log,\alpha),\qquad(2)$$

если $\lim_{t\to 0} g_\alpha(t)(\log t^{-1})^{-\alpha}=0$.

Сформулированы следующие теоремы:

1. Если имеет место (2), где $\alpha\geqslant 0$, то ряд (1) в точке x суммируем методом логарифмических средних порядка $\alpha+2$ $(R,\log,\alpha+2)$ к s.

2. Если

$$\int_0^t g_\alpha(u)\,du=o\left[t\,(\log t^{-1})^{\alpha}\right]$$

и

$$\int_t^\pi\frac{|g_\alpha(u+t)-g_\alpha(u)|}{u}\,du=o\left[(\log t^{-1})^{\alpha+2}\right],$$

где $\alpha\geqslant 0$, то утверждение предыдущей теоремы сохраняет силу.

3. Если ряд (1) в точке x суммируем $(R,\log,\alpha)$, то

$$\lim_{t\to 0} g(t)=0\ (R,\log,\alpha+1+\varepsilon),$$

где $\alpha\geqslant 2$, $\varepsilon>0$. Дано доказательство первой из этих теорем. А. А. Шнейдер

6511. О риссовской логарифмической суммируемости сопряженного продифференцированного ряда Фурье. II. Кинукава (On the Riesz logarithmic summability of the conjugate derived Fourier series. II. Kinukawa Masakiti), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 4, 202—206 (англ.)

Приведены доказательства теорем 2 и 3, сформулированных в первой части работы (реф. 6510). Кроме того, доказана теорема: Если $\lim_{t\to 0}\varphi(t)/t=0$ $(R,\log,\alpha)$ и имеет место (2), где $0<\alpha<1$, то ряд (1) в точке x суммируем $(R,\log,\alpha+1)$ к s. А. А. Шнейдер

6512. Несколько замечаний о тригонометрических полиномах. Стечкин С. Б., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 159—166

Пусть $K_n(t)=a_0/2+\sum_{k=1}^n a_k\cos kt$ — произвольный четный тригонометрический полином порядка n. Показывается, что наилучшее значение константы C в известном (см. Никольский С. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, **12**, 259—278) неравенстве

$$\left|\sum_{k=0}^n a_k/(n-k+1)\right|\leqslant C\int_0^\pi|K_n(t)|\,dt=CJ_n$$

находится в промежутке $\pi/2\leqslant C<\int_0^\pi t^{-1}\sin t\,dt$, а в случае, когда все коэффициенты a_k — действительные числа одного знака, $C=\pi/2$.

В качестве следствия из одной оценки Г. М. Голузина (Изв. АН КазахССР, сер. матем. и механ., 1949, **60**, № 3, 101—105) выводится неравенство

$$\sum_{k=0}^n|a_k|/(n-k+1/2)<2J_n,$$

если $J_n\neq 0$. Если полином

$$p_{2n}(z)=a_0z^n+\sum_{k=1}^n a_k\,(z^{n+k}+z^{n-k})$$

не имеет нулей внутри единичного круга и $\sqrt{p_{2n}(z)}=\sum_0^\infty b_kz^k$, то $J_n=(\pi/2)\sum_0^\infty|b_k|^2$.

Уточняя результаты своей предыдущей работы (Докл. АН СССР, 1950, **75**, 165—168), автор доказывает, что если

$$a_k\geqslant 0,\ a_{k+1}\leqslant a_k,\ \Delta^2a_k\leqslant 0\quad(a_{n+1}=0),\qquad(1)$$

то

$$0\leqslant(\pi/2)\,J_n-\sum_{k=0}^n a_k/(n-k+1)\leqslant Ca_0,\qquad(2)$$

где C — абсолютная константа.

Примечание референта. В том случае, когда все коэффициенты действительны и одного знака, имеет место неравенство

$$J_n>\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}a_{|n-k|}/(k+1/2),$$

более сильное, чем соответствующее этому случаю неравенство теоремы 3 реферируемой статьи. Кроме того, из одной оценки референта (РЖМат, 1956, 1240) видно, что для справедливости второго из неравенств (2) условия (1) излишне ограничительны. Оно верно для совокупности всех полиномов, коэффициенты которых образуют выпуклую или вогнутую систему чисел, удовлетворяющую соотношениям $|a_k|\leqslant A+B|a_0|$, где B и A — положительные абсолютные константы.

А. Ф. Тиман

6513. Разложение рядов Уолша и Фурье. Хиршман (The decomposition of Walsh and Fourier series. Hirschman I. I.), Mem. Amer. Math. Soc., 1955, № 15, 65 p. (англ.)

В первой части работы рассматриваются ряды Уолша, во второй — ряды Фурье. Приведем результаты, касающиеся рядов Фурье.

Пусть $f(x)\sim\sum_{-\infty}^\infty a_\nu e^{i\nu x}$.

Полагаем

$$\Delta_n(x)=\begin{cases}\sum\limits_{2^n}^{2^n-1}a_\nu e^{i\nu x} & (n=1,2,\ldots),\\ a_0 & (n=0),\\ \sum\limits_{-2^n+1}^{-2^n-1}a_\nu e^{i\nu x} & (n=-1,-2,\ldots).\end{cases}$$

Введем норму

$$\|f(x)\|_{\alpha,p}=\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\,|x|^{\alpha p}\,dx\right\}^{1/p}.\qquad(1)$$

Основываясь на теореме К. И. Бабенко о сопряженных функциях, автор доказывает неравенства

$$A'(\alpha,p)\leqslant\left\|\left(\sum_{-\infty}^\infty|\Delta_n(x)|^2\right)^{1/2}\right\|_{\alpha,p}^p\Big/\|f(x)\|_{\alpha,p}^p\leqslant$$

$$\leqslant A''(\alpha,p),\qquad(2)$$

где $1<p<\infty$, $-1/p<\alpha<1-1/p$. Случай $\alpha=0$ был рассмотрен Пейли и Литлвудом.

Пусть $\Lambda=\{\lambda_\nu\}$ $(-\infty<\nu<\infty)$ — последовательность комплексных чисел; положим $\Lambda f(x)\sim\sum_{-\infty}^\infty a_\nu\lambda_\nu e^{i\nu x}$, если этот ряд является рядом Фурье. Указывается на справедливость неравенства

$$\|\Lambda f(x)\|_{\alpha,p}\leqslant A(\alpha,p)\,M\,\|f(x)\|_{\alpha,p}$$

$$(1<p<\infty,\ -1/p<\alpha<1-1/p),$$

при условии

$$|\lambda_\nu| \leqslant M \ (-\infty < \nu < \infty),$$
$$\sum_{\pm 2^k}^{\pm 2^{k+1}} |\lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}| \leqslant M \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

При $\alpha = 0$ это результат Марцинкевича.

Для $f(x)$ с $a_0 = 0$ положим $f_\sigma(x) \sim \Sigma_{-\infty}^{\infty} a_\nu (i\nu)^{-\sigma} e^{i\nu x}$. Указывается неравенство (теорема выпуклости)

$$\|f_\sigma(x)\|_{\gamma, r} \leqslant A\,(p, q, \alpha, \beta, \sigma_1, \theta)\,\|f(x)\|_{\alpha, p}^{1-\theta}\,\|f_{\sigma_1}(x)\|_{\beta, q}^{\theta}, \quad (3)$$

где $1 < p, q < \infty$, $-1/p < \alpha < 1 - 1/p$, $-1/q < \beta < 1 - 1/q$, $0 < \sigma_1$, $0 < \theta < 1$, $\sigma = \theta\sigma_1$, $1/r = (1-\theta)/p + \theta/q$, $\gamma = (1-\theta)\alpha + \theta\beta$. Случай $\alpha = \beta = \gamma = 0$ был рассмотрен автором ранее в другой работе.

Отмечается, что методы, примененные в этой части работы, могут быть распространены на более общий случай, когда за норму функции $f(x)$ принята величина

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \prod_{k=1}^{r} \left|\sin\frac{1}{2}(x - x_k)\right|^{\alpha_k p} dx\right\}^{1/p}, \quad 1 < p < \infty,$$

где x_k — фиксированные точки отрезка $[-\pi, \pi]$, а α_k — $-1/p < \alpha_k < 1 - 1/p$ — фиксированные действительные числа.

Для рядов Уолша приводятся неравенства, аналогичные (2) и (3), и показывается, что норма (в смысле, аналогичном (1)) частных сумм ряда не превосходит константы, умноженной на норму разлагаемой в ряд функции. Меняя ролями разлагаемую функцию и коэффициенты ряда, автор получает соответствующие неравенства для коэффициентов. В работе имеются опечатки.

А. А. Шнейдер

6514. Асимптотические оценки приближений дифференцируемых непериодических функций суммами Чебышева. Селиванова С. Г., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 4, 648—651

Пусть $W^{(r)}K$ — класс функций, имеющих на $[-1, 1]$ производную порядка r, удовлетворяющую неравенству $|f^{(r)}(x)| \leqslant K$. Рассматривается точная верхняя грань остаточных членов ряда Фурье — Чебышева по функциям этого класса. Случай $r = 1$ был рассмотрен С. М. Никольским (Изв. АН СССР, сер. матем., 1946, 10, 295). Для $r \geqslant 1$ в работе доказывается, что если $U_n(f; x)$ — сумма Фурье — Чебышева для $f(x)$ $(n-1)$-го порядка, то $\sup |f(x) - U_n(f; x)| = \frac{4}{\pi^2} K n^{-r} \log n\,(\sqrt{1-x^2})^r + \varepsilon_{n;\,r}$, где верхняя грань берется по функциям класса $W^{(r)}K$ и $|\varepsilon_{n;\,r}| < Cr/n^r$, C — абсолютная константа. Доказательство основано на интегральном представлении остаточного члена ряда Фурье — Чебышева функций класса $W^{(r)}K$, полученном С. М. Никольским (Докл. АН СССР, 1949, 69, 129). Без доказательства приведены следующие результаты:

1. Пусть $W_p^{(r)}K$ — класс функций, имеющих на $[-1,1]$ производную $f^{(r)}(x) \in L_p$ $(p > 1)$, причем $\|f^{(r)}\|_p \leqslant K$. Тогда $\sup_{f \in W_p^{(r)}K} |f(x) - U_n(f; x)| = \nu(r-1, q)/(\pi n^{r-1+1/q}) \times (\sqrt{1-x^2})^{r-1/p} + O(n^{-r})$ равномерно относительно $x \in [-1, 1]$, где $\nu(r-1, q) = \frac{1}{\Gamma(r)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dt \left|\int_0^\infty e^{-v} v^{r-1} \times \frac{v\cos(t + r\pi/2) - t\sin(t + r\pi/2)}{v^2 + t^2}\, dv\right|^q\right)^{1/q}$ $(1/p + 1/q = 1)$.

2. Если $f(x)$ имеет на $[-1,1]$ производную $(r-1)$-го порядка ограниченной вариации и σ_l — скачки $(r-1)$-й производной в точках x_l, то для $1 < p \leqslant \infty$ и $r \geqslant 1$

$$\|f - U_n(f)\|_p \approx$$
$$\approx \left(\sum_{l=1}^{\infty} \left|\sigma_l \left(\sqrt{1 - x_l^2}\right)^{r-1+1/p}\right|^p\right)^{1/p} \frac{\nu(r-1, p)}{\pi n^{r-1+1/p}} \quad (n \to \infty).$$

3. Если в условиях предыдущей теоремы функция

$$f^{(r-1)}(x) = f_*^{(r-1)}(x) + A(x),$$

где $A(x)$ абсолютно непрерывна, а $f_*^{(r-1)}(x)$ — чистая функция скачков, то

$$\|f - U_n(f)\|_L \approx \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} \sum_{k=1}^{\infty} |\sigma_k| \left(\sqrt{1 - x_k^2}\right)^r.$$

Подобные результаты были получены С. М. Никольским для остаточных членов ряда Фурье периодических функций, имеющих $(r-1)$-ю производную ограниченной вариации (Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, 13, 513).

И. Г. Соколов

6515. Исследования по теории ортогональных функций в Казанском университете. Гагаев Б. М., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, 115, № 10, 23—24

6516 Д. Исследование одного класса линейных процессов приближения интерполяционными полиномами. Погодичева Н. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Днепропетр. ун-т, Днепропетровск, 1956

См. также: 6329, 6442, 6482, 6627, 6688

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

6517. О множестве непродолжаемых степенных рядов. Риччи (Sull'insieme delle serie di potenze non prolungabili. Ricci Giovanni), Giorn. mat. Bottaglini, 1955, 83, № 1, 5—11 (итал.)

Дается новое сравнительно простое доказательство теоремы Полиа (Acta math., 1918, 41, 99—118), которую в терминах теории функций можно сформулировать так: Пусть круг $|z| < 1$ есть круг сходимости степенного ряда $f(z) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и пусть $S \subset \Gamma(|z| = 1)$ есть множество всех особых точек суммы $f(z)$ этого ряда (множество S, в частности, может совпадать со всей окружностью $\Gamma(|z| = 1)$). Тогда можно определить такую числовую последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n^{1/n} = 1$, что каждая точка множества S будет особой и для суммы степенного ряда $\varphi(z) = \Sigma_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, коэффициенты которого удовлетворяют условиям: $|a_n - b_n| < \varepsilon_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Н. А. Давыдов

6518. Полиномы, ортогональные в круге, и их применение. Геронимус (Polynomials orthogonal on a circle and their applications. Geronimus Ya. L.), Amer. Math. Soc. Translation, № 104, 1954, 79

Перевод из Записок Научно-исследовательского ин-та Мат. мех. Харьковск. матем. об-ва.

Перевод из Math Revs, 1954, 15, № 10, 869.

6519. О скорости полиномиальных приближений на континуумах. Шагинян А. Л., Докл. АН СССР, 1955, 104, № 2, 190—192

Пусть Ω—произвольная жорданова область, ограниченная спрямляемой кривой L длины l, и E — некоторое замкнутое множество диаметра $2d$, лежащее внутри Ω. Через $2(d+d_0)$ обозначим диаметр минимального круга, содержащего Ω и концентрического с кругом диаметра $2d$, накрывающим E. Если функция $f(z)$ регулярна внутри Ω и непрерывна в $\overline{\Omega}$, то при любом $n>0$ существует полином $P_n(z)$ степени $\leqslant n$ такой, что для всех $z \in E$

$$|f(z)-P_n(z)| \leqslant CM \exp\left\{-\alpha n \exp\left[-\int_L ds\, \rho(s)\right]\right\}, \quad (1$$

где константа C зависит только от E и Ω, $\alpha = d_0/2d$ $(d_0<d)$, $M=\max_{z\in L}|f(z)|$ и $\rho(s)$ — расстояние от z до переменной на L точки $z(s)$, положение которой определяется соответствующей дугой s, отсчитываемой от фиксированной точки кривой L. В частности, если расстояние между E и L равно δ, то

$$|f(z)-P_n(z)| \leqslant CM \exp\{-\alpha n \exp(-l/\delta)\}.$$

Коэффициент единица при интеграле в правой части неравенства (1) в общем случае нельзя заменить на $(\pi/4)-\varepsilon$. Автор отмечает, что доказательство может быть получено из приведенных им оценок для функции Грина, обобщающих известное неравенство М. А. Лаврентьева для однолистных функций (Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1934, 5, 159). Так, например, если E — ограниченное замкнутое множество диаметра $2d$, лежащее в круге радиуса d с центром в начале координат и имеющее связное дополнение E_∞, а $G(z)$ — функция Грина в области E_∞, то

$$G(z) \geqslant d_0(2d)^{-1} \exp\left[-\int_L ds/\rho(s)\right],$$

где L — любая замкнутая спрямляемая кривая, принадлежащая E_∞ и охватывающая множество E, а $d+d_0=\max_{z\in L}|z|$.

Неравенство (1) примыкает к теореме Уолша (Walsh J. L., Sitzungsber. Akad. Wiss. München Math. Phis. Kl., 1926, 223) и улучшает прежний результат С. Н. Мергеляна (РЖМат, 1954, 3293). Формулируется также один аналогичный результат для взвешенных равномерных приближений на неограниченных множествах.

А. Ф. Тиман

6520. О мере отклонения неаналитической функции от аналитичности. Билимович (Sur la mesure de déflexion d'une fonction non analytique par rapport à une fonction analytique. Bilimovitch A.), Publs Inst. math. Acad. serbe des sci., 1954, 6, 17—26 (франц.)

В качестве меры отклонения функции $P(x,y)+iQ(x,y)$ от аналитичности автор предлагает комплексное число $B=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)-i\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$ (изложение ведется в терминах векторного исчисления).

Ли Ен Пир

6521. Интерполяционная задача Абеля — Гончарова для узлов, расположенных на данном луче. Евграфов М. А., Докл. АН СССР, 1955, 101, № 5, 789—791

Без доказательства приводятся теоремы о разложении целых функций в интерполяционный ряд Абеля — Гончарова с узлами $\lambda(n)$, $\lim_{n\to\infty} n[\lambda'(n)/\lambda(n)]=\rho^{-1}$ как для $\rho<1$, так и для $\rho\geqslant 1$. Теорема 1, соответствующая $\rho<1$, воспроизводит основную теорему из книги автора (реф. 6554). В обозначениях указанного реферата другие теоремы формулируются так:

Теорема 2. Пусть $\rho\geqslant 1$ и

$$\Phi(Z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\mu(\xi)}}{\xi-z}\,d\xi,$$

где L — контур, концы которого уходят в бесконечность в углах $\pi/\rho>\varphi>\pi/2\rho$, $-\pi/\rho<\varphi<-\pi/2\rho$, а

$$\mu(\xi)=\xi^\rho\int_0^\infty \frac{\mu_1(x)}{x^\rho}\frac{dx}{(x+\xi)^2},\quad \mu_1(\lambda(x))=x.$$

Если функция $f(t)$ в формуле (2) (реф. 6554) имеет все особенности в области D_ρ

$$|w(z)\exp[w(z)/\rho]|<e^{-1/\rho},$$

$$z=\rho^{-1/\rho}w(z)[1+w(z)]^{(1/\rho)-1},\ w(0)=0,$$

то интерполяционный ряд сходится к $F(z)$ равномерно в любой конечной части плоскости.

Теорема 3. Если в случае $\lambda(n)=n^{1/\rho}$ интерполяционный ряд $\Sigma_{n=1}^\infty a_n P_n(z)$ сходится со скоростью геометрической прогрессии, т. е. при любом R

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\max_{|z|\leqslant R}|P_n(z)|^{1/n}<1,$$

то все особенности $f(t)$ лежат в области D_ρ. В теореме 4 (теореме единственности) приводятся условия, при которых из предположения $F^{(n)}(n^{1/\rho})=0$ $(n=0,1,2\ldots)$ следует $F(z)\equiv 0$, а в теореме 5 указывается, что эти условия ослабить нельзя.

А. Ф. Леонтьев

6522. Приближения многочленами с целыми коэффициентами. Фекете (Approximations par polynomes avec conditions diophantiennes. Fekete Michel), C. r. Acad. Sci., 1954, 239, № 21, 1337—1339 (франц.)

Рассматривается проблема приближения функции многочленами с коэффициентами из кольца целых чисел мнимого квадратичного поля $P(\eta)$ на множествах, на которых эта функция допускает приближения произвольными многочленами с комплексными коэффициентами. Доказаны два необходимых условия для подобных приближений. Пусть E — ограниченное и замкнутое множество комплексной плоскости, на котором всякая не прерывная функция может быть как угодно хорошо приближена многочленами с комплексными коэффициентами. Назовем, согласно М. Фекете, алгебраическим ядром E по отношению к $P(\eta)$ подмножество $N=N[E,P(\eta)]$ множества E, состоящее из корней алгебраических уравнений с коэффициентами из $P(\eta)$, неприводимых в $P(\eta)$, все корни которых принадлежат к E. Как доказал М. Фекете, если трансфинитный диаметр $\tau(E)$ множества E меньше единицы, то ядро N или пусто, или содержит лишь конечное множество точек.

Теорема I. Если любая непрерывная на E функция может быть как угодно хорошо приближена многочленами с целыми коэффициентами из $P(\eta)$, то $\tau(E)<1$ и $N[E,P(\eta)]$ — конечное множество.

Теорема II. Если при выполнении условий теоремы I ядро N не пусто и $z_0, z_1, \ldots, z_n$ — все его

элементы, то многочлен

$$Q(z) = \sum_1^n f(z_k)\,[\lambda(z_k)/(z - z_k)\lambda'(z_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} A_k z^k,$$

$$\lambda(z) = \Pi_1^n (z - z_k),$$

должен иметь коэффициенты только из кольца целых чисел поля $P(\eta)$.

Первая теорема дает необходимое условие, которому должно удовлетворять N, а вторая — необходимое дополнительное условие, которому должна удовлетворять разлагаемая функция $f(z)$. А. О. Гельфонд

6523. Приближения многочленами с целыми коэффициентами. II. Фекете (Approximation par des polynomes avec conditions diophantiennes. Fekete Michel), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 22, 1455—1457 (франц.)

Продолжение заметки под тем же названием (реф. 6522), в которой были даны необходимые условия для возможности приближений непрерывных на E функций многочленами с коэффициентами из кольца целых чисел поля $P(\eta)$; здесь даются достаточные условия для возможности подобных приближений. Обозначения и определения, введенные в реферате на предшествующую заметку, сохраняются и здесь. Приводятся два легко доказываемых утверждения:

А. Если $\tau(E) < 1$, то существует многочлен $q(z) = z^l + c_1 z^{l-1} + \ldots + c_l$, коэффициенты которого — целые числа из $P(\eta)$, такой что $|q(z)| \leqslant \rho < 1$ при $z \in E$.

В. Пусть $s(z) = s_0 + s_1(z) + \ldots + s_j z^j + z^{j+1}$ с целыми из $P(\eta)$ коэффициентами, неприводимый в $P(\eta)$, с корнями $z_0, z_1, \ldots, z_j$. Тогда можно найти целые из $P(\eta)$ числа $t_0, t_1, \ldots, t_j$ такие, что

$$0 < |t(z_k)| = \left|\sum_{m=0}^{j} t_m z_k^m\right| < 1, \quad k = 0, \ldots, j.$$

Достаточными условиями возможности приближений на E многочленами с целыми коэффициентами из $P(\eta)$ являются условия: $\tau(E) < 1$ и $q(z) \neq 0$, $z \in E$, где $q(z)$ — многочлен, определяемый утверждением A (это будет иметь место, в частности, когда $N[E_0 P(q)]$ пусто). Не ограничиваясь этим случаем $q(z) \neq 0$, $z \in E$, автор дает и более сложные достаточные условия, когда $q(z) = 0$ для $z \in E$, используя утверждение В. Достаточные условия, полученные автором, обобщают многие условия, полученные ранее, в частности, для целочисленных приближений на прямой. А. О. Гельфонд

6524. Рациональные функции, унивалентные на множествах, разделяющих плоскость. Плисс А., Бюлл. Польской АН, Отд. 3, 1954, 2, № 6, 257—258

Рациональные функции, унивалентные на множествах, разделяющих плоскость. Плисс (Rational functions univalent on sets separating the plane. Pliś A.), Bull. Acad. polon. sci., 1954, 2, № 6, 255—256 (англ.)

Показано, что функция $r_0(z) = z^2 - z^{-2}$ дает пример рациональной функции, удовлетворяющей условиям Куратовского (РЖМат, 1955, 1127), для которой не существует кривой B, разделяющей комплексную сферу между каждыми двумя точками из совокупности всех нулей и полюсов $r_0(z)$ и такой, что на ней эта функция была бы унивалентной. Этим дается отрицательное решение вопроса, поставленного Куратовским.

В. А. Ефремович

6525. Теорема об однолистности конечных сумм трижды симметричных однолистных функций. Илиев Л., Докл. АН СССР, 1955, 100, № 4, 621—622

Пусть S_3 есть класс функций вида $f_3(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(3)} z^{3k+1}$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$ и $\sigma_n^{(3)}(z) = z + \sum_{k=1}^{n} a_k^{(3)} z^{3k+1}$. Автором ранее (Докл. АН СССР, 1952, 84, № 9) была доказана следующая теорема при $n \neq 2$:

Теорема. Если $f_3(z) \in S_3$, то $\sigma_n^{(3)}(z)$ однолистна в круге $|z| < \sqrt[3]{3}/2$. Константу $\sqrt[3]{3}/2$ нельзя заменить большей.

Теперь автор доказывает эту теорему и для случая $n = 2$. В заметке указано, что после того, как эта работа была послана в редакцию Докл. АН СССР, в библиотеке Математического института Болгарской академии наук была получена работа Гун Шэна (РЖМат, 1955, 1163), содержащая аналогичное решение вопроса. Ю. Е. Аленицын

6526. Об однолистных функциях в многосвязных областях. Аленицын Ю. Е., Докл. АН СССР, 1955, 102, № 5, 861—863

Теорема 1. Пусть область K есть круг $|z| < 1$ с конечным числом концентрических круговых разрезов, а функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, регулярна и однолистна в K и отображает эту область на некоторую область D так, что во внешний граничный компонент области D переходит окружность $|z| = 1$. Тогда из n ближайших к $w = 0$ точек внешнего граничного компонента области D, лежащих на n любых лучах, выходящих из $w = 0$ под равными углами, наиболее удаленная от $w = 0$ точка отстоит от $w = 0$ на расстояние $d \geqslant 1/\sqrt[n]{4}$, причем знак равенства достигается только для функции $f(z) = z/(1 - \varepsilon z^n)^{2/n}$, $|\varepsilon| = 1$.

Пусть система взаимно не налегающих областей обладает тем свойством, что если дополнить эти области до односвязных, уничтожая у каждой области все ее граничные компоненты, кроме надлежащего одного, то данная система областей переходит в систему взаимно не налегающих односвязных областей, называемую заполнением данной системы.

Теорема 2. Пусть B есть конечносвязная область плоскости z без изолированных граничных точек и не содержащая $z = \infty$. Если функции $f_\nu(z)$, $\nu = 1, 2$, однолистно и конформно отображают область B на взаимно не налегающие области D_ν, то для любых точек $z_\nu \in B$, $\nu = 1, 2$, являющихся точками регулярности функций $f_\nu(z)$, имеет место следующая точная оценка

$$|f_1'(z_1) f_2'(z_2)| \leqslant$$

$$\leqslant |f_1(z_1) - f_2(z_2)|^2 \, |f'(z_1, z_1, L_1) f'(z_2, z_2, L_2)|,$$

где L_ν есть тот граничный компонент области B, который отображается функцией $f_\nu(z)$ на граничный компонент области D_ν, сохраняющийся при заполнении системы областей D_ν (система из двух взаимно не налегающих областей всегда имеет заполнение), а функция $f(z, z_\nu, L_\nu)$ однолистно отображает область B на единичный круг с концентрическими круговыми разрезами так, что L_ν переходит в единичную окружность и $f(z_\nu, z_\nu, L_\nu) = 0$, $\nu = 1, 2$. Знак равенства в этой оценке достигается только для функций, определяемых уравнениями

$$(f_1(z) - a_1)/(f_1(z) - a_2) = \rho f(z, z_1, L_1),$$

$$(f_2(z) - a_2)/(f_2(z) - a_1) = f(z, z_2, L_2)/\rho,$$

где ρ — любое положительное число; a_1 и a_2 — любые конечные и различные числа; L_1 и L_2 — любые,

не обязательно различные, граничные компоненты области B.

Сформулирован еще целый ряд теорем, являющихся в основном обобщением теоремы 2 на случай m-листных функций ($m \geqslant 1$), отображающих конформно и однолистно область B на взаимно не налегающие области, система которых имеет заполнение, а также на случай функций, однолистно отображающих область B на взаимно не налегающие области, система которых имеет заполнение, принадлежащее единичному кругу.

При получении этих результатов (доказательства не приведены) используется работа Нехари (РЖМат, 1956, 5203). Г. Г. Шлионский

6527. Однолистные функции и линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Там Цой-так (Schlicht functions and linear differential equations of second order. Taam Choy-Tak), J. Rational Mech. and Analysis, 1955, **4**, № 3, 467—480 (англ.)

Пусть $f(z)$ голоморфна в области D и имеет в D голоморфную производную Шварца

$$[f, z] = (f''/f')' - (f''/f')^2/2.$$

Устанавливаются достаточные условия однолистности $f(z)$, учитывающие связь между свойствами $[f, z]$ и однолистностью $f(z)$. Автор основывается на вытекающем из тождественности совокупностей решений уравнения $[f, z] = 2Q$ и отношений W_1/W_2 линейно независимых решений W уравнения

$$W'' + QW = 0 \qquad (1)$$

известном факте: $f(z)$ однолистна в D тогда и только тогда, когда любое решение W уравнения (1) имеет в D не более одного нуля (лемма 1). Устанавливается ряд близких по характеру условий такого типа для выпуклых областей (в частности, для квадрата и бесконечного сектора), например, если в D

$$q_2 \equiv \operatorname{Im} Q < 0, \quad |q_1| \leqslant -q_2 \quad (q_1 \equiv \operatorname{Re} Q)$$

и

$$4\left|\int_{x_0 y_0}^{x, y} (q_1 - q_2)\,dx - (q_1 + q_2)\,dy\right|^2 \leqslant -|q_1| - q_2$$

($(x_0, y_0) \in D$ фиксирована и $(x, y) \in D$ произвольна), то $f(z)$ однолистна в D. Существенным в доказательствах является такой выбор обращающейся в нуль при $W = 0$ функции $L(x, y) = j \operatorname{Re}(\overline{W}W') - k \operatorname{Im}(\overline{W}W') - m\overline{W}W$ ($m(x, y)$ и постоянные j, k вещественны, $m(x, y) \subset C^{(1)}$), при котором в условиях теоремы интеграл

$$L(x_2, y_2) - L(x_1, y_1) = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} L_x\,dx + L_y\,dy$$

по определенным кривым $C \subset D$ не равен нулю. Далее рассматривается другой путь изучения вопроса, основанный на следующем обобщении одной известной теоремы: пусть $h(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ — действительные непрерывные на некотором интервале I функции и $H = h_1 + ih_2$; если $h_1 + kh_2 \leqslant h$ для некоторого действительного k и каждое решение s уравнения $s'' + hs = 0$ имеет не более одного нуля на I, то и решения S уравнения $S'' + HS = 0$ обладают этим свойством. На этом пути даны новые доказательства нескольких теорем Нехари (Nehari Z., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 545—551) и получены некоторые дополнительные результаты. П. П. Куфарев

6528. О коэффициентах R-однолистных функций. Нехари (On the coefficients of R-univalent functions. Nehari Zeev), Duke Math. J., 1955, **22**, № 2, 223—227 (англ.)

Вводится следующее определение. Пусть R есть замкнутая риманова поверхность. Функция $f(z)$, аналитическая в области B плоскости z, называется R-однолистной в B, если она отображает B на область, лежащую в R. Используя теорию абелевых интегралов и идеи, развитые в своей работе «Некоторые неравенства в теории функций» (РЖМат, 1956, 5203), автор получает следующие результаты.

Теорема. Если S_R есть класс аналитических функций $f(z)$, отображающих $|z| > 1$ на области, лежащие в данной замкнутой римановой поверхности R и имеющих в окрестности $z = \infty$ разложение

$$f(z) = z + a_0 + a_1/z + a_2/z^2 + \ldots, \qquad (1)$$

то область изменения коэффициента a_1 в классе S_R содержится в некотором круге радиуса 1.

В случае, когда R есть двулистная поверхность с двумя точками разветвления, удается найти центр указанного круга и показать, что этот круг не может быть заменен меньшим. Центр круга, указанного в теореме 1, удается найти также и в случае, когда R есть двулистная поверхность с точками разветвления ± 1, $\pm k^{-1}$ ($k \neq 0, 1, \infty$).

Если функция (1) отображает $|z| > 1$ на область, лежащую в замкнутой римановой поверхности R, все точки разветвления которой лежат в некотором круге радиуса r, то $|a_1| \leqslant 1 + r^2$.

Примечание референта. Результаты автора для случая, когда R — двулистная поверхность с двумя точками разветвления, непосредственно следуют из неравенства $|c_3 - c_2^2| \leqslant 1$, известного для коэффициентов регулярной однолистной и нормированной в единичном круге функции, примененного к функции $2(b-a)^{-1}\left(\sqrt{(f(z^{-1}) - a)/(f(z^{-1}) - b)} - 1\right) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$, где a и b — точки разветвления R и $f(z) \in S_R$. Ю. Е. Аленицын

6529. О локально ε-выпуклых и локально ε-звёздных многолистных функциях. Максимов Ю. Д., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 6, 965—967

Рассматриваются классы $C_\varepsilon(p, q)$ — локально ε-выпуклых и $S_\varepsilon(p, q)$ — локально ε-звездных функций, для которых автором ранее были даны структурные формулы (РЖМат, 1956, 4443). Формулируются теоремы:

I. Если $f(z) \in C_\varepsilon(p, q)$, то функция $r_q^{-q} f(r_q z) \in C_0(q, q)$, где r_q — наименьший положительный корень уравнения

$$q - r\left[\sum_1^{p-q} \frac{1}{|\alpha_k| - r} + \frac{|\alpha_k|}{1 - |\alpha_k| r} + \right.$$

$$\left. + \frac{2p}{1+r} + \frac{2\varepsilon}{\pi(1-r^2)}\right] = 0,$$

α_k — корни $f'(z)$, $|\alpha_k| < 1$. Другими словами — любая функция класса $C_\varepsilon(p, q)$ q-листна и выпукла в круге $|z| < r_q < 1$; число r_q нельзя увеличить. Отсюда, в частности, следует, что функции класса $C_\varepsilon(1,1)$ однолистны и выпуклы в круге

$$|z| < r(\varepsilon) = 1 + \varepsilon/\pi - \sqrt{(\varepsilon/\pi)(2 + \varepsilon/\pi)}.$$

II. Для $f(z) \in C_\varepsilon(p, q)$ с фиксированными нулями α_k, производной, $k = 1, \ldots (p-q)$, $|\alpha_k| < 1$, справедливы точные оценки

$$|f(z)| \leqslant \int_0^r q r^{q-1} \prod_{k=1}^{p-q} \left(1 + \frac{r}{|\alpha_k|}\right)(1 + |\alpha_k| r) \frac{(1+r)^{\varepsilon/\pi}}{(1-r)^{2p+\varepsilon/\pi}}\,dr$$

при $|z| < 1$,

$$|f(z)| \geqslant \int_0^r q r^{q-1} \prod_{k=1}^{p-q} \left(1 - \frac{r}{|\alpha_k|}\right)(1 - |\alpha_k| r) \frac{(1-r)^{\varepsilon/\pi}}{(1+r)^{2p+\varepsilon/\pi}} dr$$

при $|z| < r_q$.

Даются также точные оценки сверху и снизу модуля функции $f(z) \in C_\varepsilon(1,1)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \pi$ при $|z| < 1$. Приводятся некоторые следствия для функций класса $S_\varepsilon(p, q)$; в частности, доказывается, что функции класса $S_\varepsilon(1,1)$ однолистны и звездообразны в круге $|z| < r(\varepsilon)$.

С. А. Гельфер

6530. **Ядровая функция Бергмана и каноническое отображение на плоскость с разрезами.** Кубо (Bergman kernel function and canonical slit-mapping. Kubo Tadao), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1953, 28, № 1, 33—40 (англ.)

Пусть D — конечно-связная область в z-плоскости, содержащая точки $z = 0$ и $z = \infty$ и ограниченная n собственными континуумами. Пусть $s_0(z)$ — функция, отображающая конформно область D на всю плоскость с разрезами вдоль n дуг логарифмических спиралей одного и того же угла наклона $\theta/2$ и с одной и той же асимптотической точкой $z = 0$. Пусть $s_0(z)$ разлагается в окрестности $z = \infty$ в ряд Лорана вида $w = s_0(z) = z + c/z + \ldots$, $s_0(0) = 0$ и $s_0'(0) = a_0$. Пусть $P(z)$ конформно отображает область D на всю плоскость с разрезами вдоль дуг окружностей с центром в начале координат, $\lim_{z\to\infty}[P(z)/z] = 1$, $P(0) = 0$, $P'(0) = A$. Пусть $Q(z)$ конформно отображает область D на всю плоскость с разрезами вдоль отрезков лучей, направленных к началу координат,

$$\lim_{z\to\infty}[Q(z)/z] = 1,\ Q(0) = 0,\ Q'(0) = B.$$

Тогда

$$\operatorname{Re}(-e^{-i\theta}\ln a_0) - |\ln a_0|^2/\ln(A/B) \geqslant L/2\pi, \quad (1)$$

где L — внешняя логарифмическая площадь дополнения к области D (относительно всей плоскости), т. е.

$$L = \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{2i}\int_{C_k} \overline{\ln z}\,\frac{dz}{z},$$

где $C_1, C_2 \ldots C_n$ — граничные континуумы области D, которые, не нарушая общности, можно считать аналитическими кривыми.

Равенство в (1) достигается, например, в том случае, когда область D определена неравенством $|z - 1| > \sqrt{1-q}$ $(0 < q < 1)$.

При доказательстве используется лемма об ядровой функции Бергмана (Bergman S., Amer. Math. Soc., 1950, № 5).

Е. Н. Аравийская

6531. **Метод последовательных конформных отображений и его приложения к задачам фильтрации. I.** Фильчаков П. Ф., Укр. матем. ж., 1955, 7, № 4, 453—470

Исходя из общего анализа итерационного метода отображения области на полуплоскость, строится приближенный графоаналитический способ решения задачи о фильтрации под плоским флютбетом при горизонтальном подземном водоупоре. Строятся номограммы и рассматриваются примеры, иллюстрирующие практическую пригодность указанного способа для решения конкретных задач. Строгих общих оценок погрешности не приводится.

Г. Н. Положий

6532. **Об одном частном решении задачи о движении грунтовых вод.** Кучеренко Э. Г., Уч. зап. Томского ун-та, 1955, № 25, 113—114

Приводится точное решение задачи о растекании бугра грунтовых вод, рассмотренной ранее с точки зрения приближенных методов решения (Галин Л. А., Прикл. матем. и механика, 1951, 15, № 6).

Г. Н. Положий

6533. **Области однолистности целых функций.** Клуние (Univalent regions of integral functions. Cluniе J.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 20, 291—296 (англ.)

Рассматриваются целые функции $f(z)$ конечного порядка ρ $(0 < \rho < 1/2)$. Каждой такой функции соответствует бесконечная последовательность чисел $A_n \to \infty$ и последовательность областей D_n, расстояние которых от начала неограниченно растет вместе с n, таких, что при отображении $w = f(z)$ область D_n однолистно отображается либо внутрь круга $|w| < A_n$, либо в этот круг с не более чем $r = 2e(2 - \ln\cos\pi\rho)\sec\pi\rho$ непересекающимися разрезами. Для случая $\rho = 0$ такая теорема с $r = 2$ была доказана Валироном (Valiron G., Compositio math., 1936, 3, 129—135), высказавшим предположение о ее справедливости при всяком $\rho < 1/2$. При доказательстве используется известная формула Иенсена и ряд лемм относительно функции $\rho(R)$, удовлетворяющей соотношению

$$\limsup_{R\to\infty}[\ln M(R, f)/R^{\rho(R)}] = 1,\quad M(R, f) = \max_{|z|=R}|f(z)|.$$

А. Ф. Тиман

6534. **Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций.** Джрбашян М. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, 19, 133—190

Развернутое изложение результатов заметки автора (РЖМат, 1955, 1179), примыкающее к предыдущим его работам (РЖМат, 1955, 1178, 3261). В § 1 рассматривается преобразование Меллина для функции

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\mu + n\rho^{-1}).$$

Среди прочих вспомогательных результатов здесь устанавливается формула

$$\int_0^\infty E_\rho(re^{i\alpha};\ \mu+1)\, r^{\rho(s+\mu-1)-1}\, dr =$$

$$= 2\pi e^{i[\pi/2 - \rho\alpha(s+\mu-1)]}/\Gamma(2-s)\,[1 - e^{-2\pi i\rho(s+\mu-1)}],$$

$$(\operatorname{Re} s = 1/2),$$

справедливая при $\rho > 1/2$, $1/2 < \mu < 1/2 + 1/\rho$, $\pi/2\rho \leqslant \alpha \leqslant 2\pi - \pi/2\rho$.

В § 2 для $\rho \geqslant 1/2$, $1/2 < \mu < 1/2 + 1/\rho$ изучаются преобразования

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{2\pi\rho}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{\exp(\pm ixy) - 1}{\pm iy}\, g(y)\, y^{\mu-1}\, dy, \quad (1)$$

$$g^{(\pm)}(y)\, y^{\mu-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{d}{dy}\left\{y^\mu \int_0^\infty E_\rho(x^{1/\rho}\, y^{1/\rho}\, e^{\pm i\pi/2\rho};\ \mu+1)\, x^{\mu-1} f(x)\, dx\right\}, \quad (2)$$

где $g(y)\, y^{\mu-1} \in L_2(0, \infty)$, $f(x) \in L_2(0, \infty)$, и устанавливается ряд результатов типа равенства Парсеваля.

В § 3 доказывается сходимость в среднем обобщенных преобразований (1) и (2), а также устанавливается

теорема об аппроксимации в среднем целыми функциями на данной системе лучей, исходящих из одной точки. Приведенные здесь утверждения обобщают предложение Планшереля в теории интеграла Фурье.

В § 4 содержится доказательство теорем типа теоремы Винера и Пейли, дающих интегральное представление некоторых классов целых функций конечного порядка и нормального типа. Полученные результаты дополняют прежние исследования автора (РЖМат, 1955, 1178). А. Ф. Тиман

6535. О некоторых методах экстраполяции. Малявин (Sur quelques procédés d'extrapolation. Malliavin Paul), Acta math., 1955, 93, № 3-4, 179—255 (франц.)

Рассмотрение проблемы обобщенной квазианалитичности, обобщенной проблемы единственности моментов, проблемы замкнутости некоторых последовательностей функций, исследования целых функций, представимых рядами Дирихле, и др. путем сведения к решению особого рода проблемы Ватсона. Статья содержит четыре главы.

Пусть Λ — последовательность положительных чисел ($\Lambda = \{\lambda_n\}$), причем

$$\inf |\lambda - \lambda'| = h > 0;\ \lambda, \lambda' \in \Lambda,\ \lambda \neq \lambda', \qquad (1)$$

$\lambda(r) = 2\Sigma_{\lambda < r} \frac{1}{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, Ω_Λ — область, представляющая собой внешность кругов с центрами в $\lambda \in \Lambda$ радиуса $h/4$, $k(r)$ — действительная функция, определенная на $(0, \infty)$; $k^*(r) = \sup_{r' \leqslant r} k(r')$, $k_*(r) = \inf_{r' \geqslant r} k(r')$. Функция $k(r)$ называется асимптотически возрастающей, если $\sup_r (k(r) - k_*(r)) < \infty$.

В первой главе изучается следующая проблема: пусть $f(z)$ — функция, мероморфная в полуплоскости $x > 0$, и Λ_1, Λ_2 — две последовательности положительных чисел со свойством (1). Пусть все полюсы $f(z)$ содержатся в Λ_2, в точках Λ_1 она обращается в нуль и $|f(z)| < M_n$, $z \in \Omega_{\Lambda_2}$, $n = [x]$. При каких условиях на $\{M_n\}$, Λ_1 и Λ_2 можно утверждать, что $f(z) \equiv 0$? Основная теорема гласит, что расходимость при любом a интеграла

$$\int^{+\infty} M[k_*(r) - a] \frac{dr}{r^2} = +\infty, \qquad (2)$$

где $M(\sigma) = \sup_n (n\sigma - \ln M_n)$, $k(r) = \lambda_1(r) - \lambda_2(r)$, влечет $f(z) \equiv 0$. Напротив, при сходимости для какого-нибудь b интеграла

$$\int^{+\infty} M[k^*(r) - b] \frac{dr}{r^2} < +\infty, \qquad (3)$$

имеется функция, обладающая перечисленными свойствами и не равная тождественно нулю. Если $k(r)$ — асимптотически возрастающая, то условие (2)—необходимое и достаточное для того, чтобы из указанных свойств следовало $f(z) \equiv 0$. В частности, это будет иметь место, если Λ_2 пусто. Указанная проблема, как показывается далее, эквивалентна такой проблеме Ватсона: пусть $g(z)$ — функция, голоморфная в полуплоскости $x > 0$ и

$$|g(z)| < M_n e^{-xk(r)},\ |z| = r,\ n = [x]. \qquad (4)$$

При каких условиях на $\{M_n\}$ и $k(r)$ можно утверждать, что $g(z) \equiv 0$ (эта проблема отличается от классической проблемы Ватсона тем, что здесь индекс n зависит от абсциссы x; эквивалентность понимается в том смысле, что если есть функция $f(z) \not\equiv 0$ в первой проблеме, то также имеется функция $g(z) \not\equiv 0$ во второй проблеме, и обратно). Проблему Ватсона (отыскание функции $g(z)$ со свойством (4)) обозначим $W(M_n, k(r))$, а условие (2) обозначим $U(M_n, k(r))$. При последнем условии $g(z) \equiv 0$. Напротив, если выполняется (3), то имеется в проблеме Ватсона функция $g(z) \not\equiv 0$.

Во второй главе устанавливается, что решение ряда проблем анализа эквивалентно решению сформулированной проблемы Ватсона.

Теорема. Для того чтобы существовала мера μ (не нуль), удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty t^n |d\mu(t)| < M_n,\quad \int_0^\infty t^\lambda d\mu(t) = 0,\ \lambda \in \Lambda \qquad (5)$$

(проблема моментов Стилтьеса), необходимо и достаточно, чтобы проблема $W(M_n, \lambda(r))$ допускала ненулевое решение.

Теорема. Система $\{t^\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, полна в $C_F(0, \infty)$, если проблема $W(M_n, \lambda(r))$, где $M_n = \|t^n\|_F$, имеет единственное нулевое решение. В том случае, когда $\ln |F(e^\sigma)|$ — выпуклая функция от σ, это условие и необходимо.

Теорема (об обобщенной квазианалитичности на полупрямой). Для того чтобы существовала бесконечно дифференцируемая функция $f(t) \not\equiv 0$ на $(0, \infty)$ такая, что $|f^{(n)}(t)| < M_n$ и $f^{(\lambda)}(0) = 0$, $\lambda \in \Lambda$, необходимо и достаточно, чтобы проблема $W(M_n, \lambda(r) - \ln r)$ допускала ненулевое решение.

Теорема. Для того чтобы существовала функция $F(u)$, голоморфная и ограниченная в полосе $|w| < \pi/2$ ($u = v + iw$), такая, что

$$|F(u) - \Sigma_{\lambda < p} A_\lambda e^{-\lambda u}| < M_p e^{-pv}\ (\lambda \in \Lambda,\ -\infty < v < +\infty,\ p = 1, 2, \ldots),$$

необходимо и достаточно, чтобы проблема $W(M_n, \ln r - \lambda(r))$ имела ненулевое решение.

Формулируются и другие теоремы, которые из-за недостатка места не приводим. Третья глава посвящена оценке мероморфных функций $f(z)$ в области Ω_{Λ_2} (все полюсы $f(z)$ лежат в Λ_2), если функция $f(z)$ задана на Λ_1 (известно поведение $f(z)$ на Λ_1) и выполнено условие (2) (при условии (2) функция $f(z)$ своими значениями на Λ_1 определяется единственным образом) и применению этой оценки к выводу следующего неравенства, аналогичного основному неравенству в монографии Мандельбройта (реф. 6553). Пусть $F(u)$ голоморфна в полуполосе $v > v_0$, $|w| < \pi/2$ ($u = v + iw$) и

$$|F(u) - \Sigma_{\lambda_k < n} c_k e^{-\lambda_k u}| < \alpha^n M_n e^{-nv}\ (v > v_1,\ \lambda_k \in \Lambda).$$

Если $\overline{\lim}_{r \to \infty} [\lambda(r)/\ln r] < 1$, $k(r) = \ln r - \lambda(r)$ и

$$\int^\infty M[k_*(r)] \frac{dr}{r^2} = +\infty,$$

то $\ln |c_k| < A + \ln m(v_0) + \lambda_k(v_0 + \beta) + \lambda_k [k(\lambda_k) - k_*(\lambda_k)]$, где $m(v_0)$ — максимум $|F(u)|$ в указанной полуполосе, β зависит только от Λ, A зависит от Λ и $\{M_n\}$. Это неравенство затем используется для рассмотрения вопроса о том, когда порядки целой функции, определенной рядом Дирихле, в плоскости и в полосе достаточной ширины будут равны. В четвертой

главе рассматривается квазианалитичность линейных операторов. А. Ф. Леонтьев

6536. Теория граничных множеств аналитических функций. Носиро (解析函數の集積値集合の理論. 能代清), 數學, (Сугаку), 1953, 5, № 2, 65—72 (япон.)

Обзор новых исследований о граничных множествах аналитических функций с определенными указаниями на взаимосвязь между результатами, установленными различными исследователями и автором статьи. Y. Komatu

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 7, 614.

6537. Мероморфные функции с тремя значениями, распределенными по лучам. Эдрей (Meromorphic functions with three radially distributed values. Edrei Albert), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 2, 276—293 (англ.)

Пусть $f(z)$ — мероморфная в конечной z-плоскости функция, $\delta(a, f)$ — неванлинновский дефект функции $f(z)$ в точке a. Пусть дана система $q(\geqslant 1)$ лучей

$$\arg z = \omega_1, \ldots, \arg z = \omega_q, \quad 0 \leqslant \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_q < 2\pi. \tag{1}$$

Мы скажем, что a-точки $f(z)$ распределены по лучам (1), если имеется самое большее конечное число a-точек, не лежащих на лучах (1). Главным результатом работы являются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть нули и полюсы $f(z)$ и единицы $f^{(l)}(z)$ $(l \geqslant 0, f^{(0)} \equiv f)$ распределены по лучам (1) и $\delta(0, f) + \delta(\infty, f) + \delta(1, f^{(l)}) > 0$, тогда порядок ρ функции $f(z)$ конечен и $\rho \leqslant \pi\gamma^{-1}$, где $\gamma = \min_{1 \leqslant i \leqslant q} (\omega_{i+1} - \omega_i)$, $\omega_{q+1} = 2\pi + \omega_1$.

Теорема 3. Пусть $g(z)$ — целая функция вида $g(z) = P(z) \exp[Q(z)]$, где $Q(z)$ и $P(z)$ — целые функции, причем $P(z)$ — конечного порядка. Если нули $g(z)$, $g'(z)$, $g''(z)$, исключая возможно конечное число, лежат на действительной оси, то порядок $Q(z)$ $\rho \leqslant 1$.

Из этих теорем получены многочисленные следствия. Приведем одно из них. Пусть $f(z)$ имеет только действительные нули и единицы и $\operatorname{Im} f(z) \neq 0$ в некоторой точке на действительной оси. Тогда

а) или

$$f(z) = [\sin(\xi z + \eta)\, e^{i(\xi z + \eta_1)}] / \sin(\eta - \eta_1), \quad \sin(\eta - \eta_1) \neq 0,$$

где ξ, η и η_1 — действительные постоянные;

б) или

$$f(z) = \sin(p[\xi z + \eta])\, e^{i(p-1)(\xi z + \eta)} / \sin(\xi z + \eta),$$

где $p(\neq 0, 1)$ — целое число, ξ, η — действительные постоянные.

В работе существенно использованы методы и результаты неванлинновской теории распределения значений. А. А. Гольдберг

6538. Новые добавления к теории распределения значений. Кюнци (Neue Beiträge zur Wertverteilungslehre. Künzi Hans P.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 129 (нем.)

Автор указывает на проведенные им исследования римановых поверхностей с двоякопериодическими концами и четверть-концами (Künzi H., C. r. Acad. sci., 1952, 234, 793—795, 1660—1662; РЖМат, 1956, 4451). Подчеркнуто, что порядок мероморфной функции, отображающей конечную z-плоскость на риманову поверхность с четверть-концами, может при фиксированном комплексе отрезков меняться в зависимости от положения точек, в которые проектируются точки ветвления (см. пример из статьи Кюнци, РЖМат, 1956, 4451). А. А. Гольдберг

6539. Интегральные представления характеристической функции, функции числа a-точек и обобщенной нормальной сферической формы и обобщение теоремы Бореля. Огузтёрели (Représentations intégrales de la fonction caracteristique, de la fonction de nombre et de la forme sphérique normale généralisée et extension d'un theorème de Borel. Oğuztöreli M. N.), Istanbul Univ. fen fak. mec., 1954, A19, № 2, 79—85 (франц.; рез. турец.)

Ранее (РЖМат, 1956, 5205) автор изучал распределение значений функций, мероморфных в областях, для которых существует функция Грина. В § 1 реферируемой статьи даются интегральные представления для введенных в предыдущей статье функций, являющихся обобщением неванлинновских характеристической функции $T(r)$ (в обычной и в нормальной сферической форме) и функции числа a-точек $N(r, a)$ (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, ГИТТЛ, М.— Л., 1941). В § 2 на мероморфные функции рассматриваемого класса переносится известная теорема Пикара — Бореля (Неванлинна Р., см. выше, п. 215). Автор, повидимому, не знаком со статьей Хельстрёма (Hällström G. af., Acta Acad. Aboensis, M.- Ph., 1939, 12, № 8, 1—100), где получены аналогичные результаты для более широкого класса функций. Характеристические функции автора получаются из характеристических функций, введенных Хельстрёмом, подстановкой $\lambda = 1/(1 + \ln r)$. В частности, интегральному представлению (12) для $N(r, a)$ соответствует формула (28) у Хельстрёма. А. А. Гольдберг

6540. Об одном свойстве гармонических функций. Бабушка Иво, Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 2, 220—233 (русс.; рез. нем.)

Пусть Ω — плоская односвязная область, ограниченная кусочно-гладкой кривой без точек возврата. Подразумевается, что угол $\vartheta(s)$, между положительной касательной и некоторой осью, абсолютно непрерывен на каждой гладкой части кривой и производная интегрируема в p-й степени $(p > 1)$. Доказывается, что сопряженная гармоническая функция $V(z)$ к гармонической в указанной области функции $U(z)$, удовлетворяющей условию $\iint_\Omega U^2(z)\, dx\, dy < \infty$, суммируема на области Ω в степени $2 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любое малое число. Если $V(z)$ удовлетворяет условию $V(z_0) = 0$, где $z_0 \in \Omega$, то норма по области функции $V(z)$ в пространстве $L_{2-\varepsilon}$ ограничена нормой элемента $U(z)$ в L_2, числом, зависящим лишь от ε и z_0. Автору неизвестно, можно ли брать $\varepsilon = 0$. Результат в такой более сильной форме установлен автором ранее для случая гладких границ вышеописанного вида. Если граница имеет точки возврата, $V(z)$ может оказаться даже неинтегрируемой. И. Н. Карцивадзе

6541. Об интегрировании уравнения Пуассона на римановых поверхностях. Мюрберг (Über die Integration der Poissonschen Gleichung auf Riemannschen Flächen. Myrberg Lauri J.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 142—143 (нем.)

Реферат доклада на международном конгрессе математиков в Амстердаме в 1954 г. Подробное изложение доклада опубликовано автором в двух статьях (РЖМат, 1955, 5760; 1956, 357). Л. И. Волковыский

6542. К теории функций многих комплексных переменных. Об одной полной ортонормальной системе в гиперболическом пространстве симметрических и кососимметрических матриц. Хуа Ло-гэн (多個複變數函數論. III. 對稱方陣及斜對稱方陣變曲空間的完整正交系, 華羅庚), 數學學報 (Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica), 1955, 5, № 2, 205—242 (кит.; рез. русс.)

Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — целые числа, удовлетворяющие условию $f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0$, $A_{f_1, \ldots, f_n}(X)$ — представление общей линейной группы порядка n с сигнатурой $(f_1, \ldots, f_n)$. $N(f_1, \ldots, f_n)$ — порядок представления $A_{f_1 \ldots f_n}(X)$. Обозначая $A^{[m]}(X) = A_{m, 0, \ldots, 0}(X)$ и $A^{(m)}(X) = A_{\underbrace{1, \ldots, 1}_{m \text{ раз}}, 0, \ldots, 0}(X)$, автор показывает, что с помощью полученных им двух алгебраических тождеств представления $(A^{[2]})^{[f]}$ и $(A^{(2)})^{[f]}$ можно разложить в прямую сумму неприводимых представлений, а именно:

$$(A^{[2]})^{[f]} = \sum_{\substack{f_1 + \ldots + f_n = f \\ f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0}} A_{2f_1, \ldots, 2f_n}, \qquad (1)$$

$$(A^{(2)})^{[f]} = \sum_{f} A_{f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots, f_{[n/2]}, f_{[n/2]}, \dot{o}}, \qquad (2)$$

где $\dot{o} = 0$, для четных n и $\dot{o}$ вычеркивается для нечетных n.

Пусть $S = (s_{ij})$ — симметрическая матрица порядка n. Элементы этой матрицы, расположенные в следующем порядке:

$$s_{11}, \sqrt{2}\, s_{12}, \ldots, \sqrt{2}\, s_{1n}, \; s_{22}, \sqrt{2}\, s_{23}, \ldots, \sqrt{2}\, s_{2n},$$

$$s_{33}, \ldots, s_{n-1, n-1}, \ldots, \sqrt{2}\, s_{n-1, n}, \; s_{nn},$$

дают $n(n+1)/2$-мерный вектор s.

Преобразование $T = USU^{-1}$ над S индуцирует преобразование s, которое будет $U^{[2]}$. Компонентами $s^{[f]}$ будут однородные многочлены степени f аргументов s_{ij} и размерность его равна

$$(n(n+1)/2 - f - 1)!/(f!(n(n+1)/2 - 1)!).$$

Тождество (1) означает, что $s^{[f]}$ располагается в подпространстве размерности $N(2f_1, \ldots, 2f_n)$, компоненты которого обозначаются через

$$\psi^i_{f_1, \ldots, f_n}(S), \quad i = 1, 2, \ldots, N(2f_1, \ldots, 2f_n). \qquad (3)$$

Когда S переходит в T, тогда $\psi^i_{f_1, \ldots, f_n}(S)$ линейным преобразованием с матрицей $A(2f_1, \ldots, 2f_n)$ переходит в $\psi^i_{f_1, \ldots, f_n}(T)$. Аналогичное заключение дается и для кососимметрических матриц с помощью тождества (2).

Пусть Z симметрическая матрица с n строками гиперболического пространства $\mathfrak{R}$ симметрических матриц. С помощью системы (3) автор получает ортонормальную систему для пространства $\mathfrak{R}$ и устанавливает формулы Коши и Пуассона.

Например,

$$f(Z) = c \int_C \ldots \int \det(I - Z\bar{S})^{-(n+1)/2} f(S)\, \dot{S},$$

где C — характеристическое многообразие, определяемое условием «Z — унитарна»; $\dot{S}$ — инвариантная мера на C;

$$c = (\sqrt{\pi})^{n(n+1)/2} \frac{\Gamma(1/2)\, \Gamma(2/2) \ldots \Gamma(n/2)}{\Gamma(1)\, \Gamma(2) \ldots \Gamma(n)}.$$

Соответствующие формулы установлены для кососимметрических матриц. В работе имеются опечатки.

А. В. Лебедев

6543. Характеристика полных аналитических пространств. Грауэрт (Grauert Hans), Math. Ann., 1955, 129, № 3, 235—259 (нем.)

Комплексное многообразие $\mathfrak{M}$ называется полным аналитическим многообразием, если выполняются следующие условия: 1) $\mathfrak{M}$ имеет счетный базис окрестностей, 2) для двух любых точек x, $y \in \mathfrak{M}$, $x \neq y$, существует аналитическая в $\mathfrak{M}$ функция f, для которой $f(x) \neq f(y)$, 3) в каждой точке $x \in \mathfrak{M}$ существует n аналитических функций, которые в окрестности x определяют локальную систему координат, 4) $\mathfrak{M}$ аналитически выпукло.

Рало (Radó T., Acta Szeged, 1924, 2, 101—121) было показано, что для полных аналитических многообразий первое требование излишне. Автор изучает вопрос о возможности замены требований 2), 3), 4) более слабыми. Комплексное многообразие $\mathfrak{M}$ называется K-полным, если в каждой точке $x \in \mathfrak{M}$ существует конечное число аналитических в $\mathfrak{M}$ функций, отображающих окрестность x нигде не вырождающимся преобразованием в комплексное числовое пространство. Оказывается, что комплексное многообразие удовлетворяет всем четырем требованиям определения, если оно аналитически выпукло и K-полно.

Свои исследования автор ведет, заменяя комплексное многообразие более общим понятием — понятием комплексного пространства. Хаусдорфово пространство $\mathfrak{R}$ называется комплексным пространством, если $\mathfrak{R}$ снабжено покрытием $\{U_i\}$ открытых множеств U_i, которые топологическим отображением Φ_i отображаются на аналитически разветвленные наложения областей комплексного числового пространства $\mathfrak{A}_i$. Если U_i, $U_j \in \{U_j\}$ имеют непустые пересечения, то требуем, чтобы отображение $\Phi_j \Phi_i^{-1}$ было аналитическим в $\Phi_i(U_i) \subset \mathfrak{A}_i$.

Введя понятие нормально укладывающейся (normal eingebettet) окрестности точки (определения 4), 5), 6)), автор определяет полное аналитическое комплексное пространство аналогично определению полного аналитического многообразия, заменяя требование 3) новым требованием 3′): к каждой точке $x \in \mathfrak{R}$ существует конечное число аналитических в $\mathfrak{R}$ функций, нормально укладывающих окрестность точки x (для комплексных многообразий требования 3) и 3′) эквивалентны). При этом предполагается, что пространство $\mathfrak{R}$ состоит самое большее из счетного множества компонент. В аналитическом полном пространстве имеют место первая теорема Кузена и теорема об аппроксимации (теорема Рунге).

Далее устанавливаются следующие основные результаты:

1. Топология K-полного пространства обладает счетным базисом окрестностей (теорема 8).

2. Каждое K-полное n-мерное комплексное пространство аналитически эквивалентно римановой области над C^n (теорема A).

3. Аналитически выпуклая риманова область над C^n, удовлетворяющая некоторому условию (C-условию), есть полное аналитическое пространство (теорема B).

Результаты работы дают основания автору сделать вывод, что теория полных аналитических пространств есть теория аналитически выпуклых римановых областей над C^n и что требования определения полного аналитического пространства можно заменить более слабыми требованиями K-полноты и аналитической выпуклости.

А. В. Лебедев

6544. Конструкция рядов Дирихле с обобщенными характерами, связанных с модулярными формами

n-й степени. **Маасс** (Die Bestimmung der Dirichletreihen mit Grössencharakteren zu den Modulformen *n*-ten Grades. Maass Hans), J. Indian Math. Soc., 1955, **19**, № 1, 1—23 (нем.)

Вычисляется определенный интеграл, взятый по пространству всех симметрических положительных матриц Y порядка n,

$$\Omega(s, T; u) = \int_{Y>0} e^{-2\pi\sigma(TY)} u(Y) |Y|^{s-(n+1)/2} [dY],$$

где σ означает след матрицы, T — некоторую положительную симметрическую матрицу, а $[dY]$ — произведение дифференциалов всех элементов матрицы Y. $u(Y)$ удовлетворяет введенной А. Сельбергом системе дифференциальных уравнений

$$\left\{\sigma\left(Y\frac{\partial}{\partial Y}\right)^k + \lambda_k\right\} u(Y) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \left(e_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial y_{\mu\nu}}\right), \quad e_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = \nu, \\ 1/2, & \text{если } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Автор показывает, что

$$\Omega(s, T; u) = |T|^{-s} (2\pi)^{-ns} \Gamma(s-\alpha_1) \ldots$$
$$\ldots \Gamma(s-\alpha_n)\, \pi^{n(n-1)/4} u(T^{-1}),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — комплексные числа, зависящие только от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, причем $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n(n-1)/4$. Используя значение этого интеграла, можно ввести следующие ряды Дирихле, связанные с модулярной формой степени n. Пусть $f(Z) = \sum_{T\geqslant 0} a(T) e^{2\pi i\sigma(TZ)}$ — модулярная форма степени n. Представим $f(iY)$ в виде:

$$f(iY) = \sum_{r=0}^{n} f_r(Y),$$

$$f_r(Y) = \sum_{\substack{\text{ранг } T=r \\ T\geqslant 0}} a(T) e^{-2\pi\sigma(TY)}.$$

Положим

$$\xi(s; u, f) = c_n \int_{R_n} f_n(Y) u(Y) |Y|^{s-(n+1)/2} [dY],$$

$$c_n = n^{-1/2} 2^{n(n-1)/4},$$

R_n — фундаментальная область в пространстве всех симметрических положительных матриц относительно группы преобразований $Y \to U'YU$ (U — целочисленная унимодулярная матрица). Тогда

$$\xi(s; u, f) = 2n^{-1/2} (2\pi)^{-ns+[n(n-1)/4]} (\Pi_{k=1}^{n} \Gamma(s-\alpha_k)) \times$$
$$\times D(s; u, f),$$

$$D(s; u, f) = \sum_{\{T\}} \frac{a(T)\, u(T^{-1})}{\varepsilon(T)} |T|^{-s}.$$

$\varepsilon(T)$ — число автоморфизмов T (суммирование распространено на все целочисленные положительные симметрические неэквивалентные матрицы T). Вопрос о функциональном уравнении для $D(s; u, f)$ в реферируемой статье не рассматривается. Автор обещает это сделать в следующей работе. И. И. Пятецкий-Шапиро

6545. **Ряды Пуанкаре для эрмитовой модулярной группы. Беккер** (Poincarésche Reihen zur hermitischen Modulgruppe. Becker Hugo), Math. Ann., 1955, **129**, № 2, 187—208 (нем.)

Обозначим через $\mathfrak{Z}^{(n)}$ пространство всех комплексных матриц Z порядка n, удовлетворяющих условию: эрмитова матрица $(Z - \bar{Z}')/2i$ положительна.

Каждое аналитическое преобразование $\mathfrak{Z}^{(n)}$ в себя, как известно, задается следующим образом:

$$Z \to Z_1 = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \qquad (1)$$

где матрица $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ удовлетворяет соотношению: $\bar{\sigma}' I \sigma = I$, $I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Пусть Γ — некоторая дискретная группа аналитических преобразований $\mathfrak{Z}^{(n)}$ в себя. Модулярной формой $g(Z)$ размерности $-k$ относительно группы Γ с системой мультипликаторов $v(\sigma)$ ($|v(\sigma)| = 1$) называется регулярная в $\mathfrak{Z}^{(n)}$ функция, удовлетворяющая трансформационному уравнению

$$g(\sigma(Z)) = v(\sigma) |CZ + D|^k g(Z) \qquad (2)$$

и разлагающаяся в ряд Фурье вида

$$g(Z) = \sum_{F\geqslant 0} a(F) \exp\{2\pi i \operatorname{Sp}(FZ)\}, \qquad (3)$$

$\operatorname{Sp}(FZ)$ означает след матрицы FZ.

Конструкция модулярных форм производится с помощью рядов Пуанкаре вида

$$g_{-k}(Z, F) = \sum_{\sigma} \exp\{2\pi i \operatorname{Sp}(F\sigma(Z))\} v(\sigma)^{-1} |CZ + D|^{-k}, \qquad (4)$$

где σ пробегает все элементы из Γ, которые дают в ряде (4) различные члены. Сходимость рядов (4) исследуется с помощью геометрических соображений. Устанавливается, что при

$$k > \min(4n - 2;\ 2n + 2s),$$

где s — ранг матрицы F, ряды (4) сходятся при довольно общих предположениях относительно структуры группы Γ. Эти предположения в частности, выполняются для введенных Х. Браун так называемых эрмитовых модулярных групп и их конгруенц-подгрупп.

Далее доказывается, что ряды (4) являются модулярными формами. В конце статьи отмечается, что вопрос об оценке сверху числа линейно независимых модулярных форм данной размерности остается открытым. В связи с этим не удается также доказать, что всякая модулярная форма является линейной комбинацией рядов типа (4). И. И Пятецкий-Шапиро

6546. **О мероморфных модификациях. II. Общие свойства мероморфных модификаций. Штолль** (Über meromorphe Modifikationen. II. Allgemeine Eigenschaften meromorpher Modifikationen. Stoll Wilhelm), Math. Z., 1955, **61**, № 4, 467—488 (нем.)

Часть I см. РЖМат, 1956, 1296. Пусть $2n$-мерное комплексное многообразие G содержит открытое множество A, аналитически отображающееся через τ в $2m$-мерное комплексное многообразие H. Существует открытая окрестность U множества $M = G \setminus A$ и аналитическое в U, содержащее M множество размерность которого $\leqslant 2n - 2$.

Если $L \subseteq G$ и $R \subseteq M$, то точка $Q \in H$ тогда и только тогда принадлежит «множеству рассеивания» $\sum_\tau(R, L) = \sum(R, L)$ отображения τ вдоль L в R, если существует последовательность точек $P_\nu \in L \cap A$, для которой $\lim_{\nu\to\infty}\tau(P_\nu) = Q$ и $P = \lim_{\nu\to\infty} P_\nu$. В частности, для $P \in M$ $\sum(P, L) = \sum(\{P\}, L)$. Если $\sum(P, L)$ содержит по крайней мере две точки, то отображение τ «рассеивается» вдоль L в точке P. Если $\sum(P, L)$ не содержит ни одной точки, то τ вдоль L имеет пробел в точке P.

Основываясь на понятии рассеивания, автор вводит понятие мероморфного отображения. Отображение τ называется мероморфным в точке $P_0 \in G$, если $P_0 \in A$, или $P \in M$ и существует такая открытая окрестность W точки P_0, что вдоль каждой комплексной кривой $L \subset W$, для которой $\bar{L} \cap M = L \cap M = \{P_1\}$, τ не рассеивается в P_1. Отображение τ называется мероморфным на $B \subseteq G$, если оно мероморфно в каждой точке B. τ называется устранимо особым в точке P_0, если оно регулярно в P_0, и существенно особым, если оно в P_0 мероморфно и не регулярно; при этом точка P_0 называется полюсом или точкой неопределенности, если τ (вдоль G) имеет в P_0 пробел или рассеивается. Мероморфные отображения изучаются в связи с модификациями. Модификация $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, & A, & M, & \tau \\ H, & B, & N, & v \end{pmatrix}$ называется мероморфной, если отображение τ мероморфно в G. $\mathfrak{M}$ называется взаимно мероморфной, если мероморфны $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^{-1}$. В частности: мероморфная модификация при $n = 2$ взаимно мероморфна; σ — процесс Хопфа (реф. 6548) и его обращение — мероморфные модификации. Как частный случай мероморфных модификаций изучаются аналитические модификации (v регулярно в каждой точке множества N) и устанавливается ряд их свойств.

Важное значение для дальнейших исследований имеет понятие изменения при модификации. Говорят, что модификация $\mathfrak{M}$ изменяет комплексное многообразие G в точке $P_0 \in G$, если $P_0 \in M^*$, и не изменяет его, если $P_0 \in E$. Здесь $M^* = G \setminus E$. Точка $P_0 \in G$ тогда и только тогда принадлежит множеству E, когда τ можно псевдоконформно продолжить из A в окрестность точки P. Модификации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^{-1}$ тогда и только тогда не изменяют многообразий G и H, когда они аналитические.

Основной результат реферируемой части работы составляют теоремы тождественности, являющиеся критериями того, что рассматриваемые модификации не изменяют в данной точке многообразия G. Приведем здесь одну из них:

Теорема 6.1. 1) Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, & A, & M, & \tau \\ H, & B, & N, & v \end{pmatrix}$ — открытая модификация, v — регулярно в точке $Q_0 \in N$.

2) Через точку $P_0 \in M$ проходит n комплексных кривых L_ν и $M \cap \bar{L}_\nu = M \cap L_\nu = \{P_0\}$.

3) Пусть точка P_0 — обыкновенная точка L_ν и касательные векторы к L_ν в точке P_0 линейно независимы.

4) Пусть $Q_0 \in \bigcap_{\nu=1}^{n} \sum(P_0, L_\nu)$.

Тогда модификация $\mathfrak{M}$ не изменит многообразия G в точке P_0. А. В. Лебедев

6547. О мероморфных модификациях. III. Свойство рассеивания аналитических и мероморфных модификаций. Шталль (Über meromorphe Modifikationen. III. Streueigenschaften analytischer und meromorpher Modifikationen. Stoll Wilhelm), Math. Z., 1955, 62, № 2, 189—210 (нем.)

Реферируемая статья является продолжением предыдущих статей автора (РЖМат, 1956, 1296, 6546). Рассматриваются только 4-мерные модификации и поэтому индекс 2 в обозначении модификаций опускается. Устанавливается, что если модификация $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ аналитическая, а отображение τ особое в точке $P_0 \in M$, то множество рассеивания $\Sigma(P_0)$ или пусто, или есть однородное двумерное аналитическое множество из H. Основным результатом реферируемой части и ядром всей работы является основная теорема о мероморфных модификациях. При этом, как и раньше, при определении рассматриваемых комплексных многообразий не предполагается существования счетного базиса открытых множеств.

Теорема. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ — взаимно открытая мероморфная модификация и τ — особое в точке $P_0 \in M$. Тогда множество рассеивания $\Sigma(P_0)$ содержит двумерное аналитическое множество C из H. Множество D особых точек $Q \in C$ отображения v не имеет в H точки сгущения. Если $v(Q, H)$ — аналитическое продолжение v в открытое множество $B \cup C \setminus D$, то для $Q \in C \setminus D$ $v(Q, H) = P_0$. Как указывает автор, эта основная теорема делает возможной замену взаимно открытой мероморфной модификации σ-процессом. Утверждения основной теоремы становятся более ясными, если рассматривать многообразия G и H со счетными базисами открытых множеств. Тогда M и N содержат самое большее счетное множество неприводимых двумерных аналитических множеств; следовательно, отображения τ и v будут особыми самое большее на счетном множестве точек. Роль этой теоремы будет показана в последующих частях работы. А. В. Лебедев

6548. Однолистные отображения и локальные модификации 4-мерных комплексных многообразий. Хопф (Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. Hopf Heinz), Comment. math. helv., 1955, 29, № 2, 132—156 (нем.)

Известно, что существуют аналитические отображения, осуществляемые с помощью n функций n комплексных переменных, при которых почти каждая точка имеет своим прообразом конечное число точек и в то же время имеется исключительная точка, прообраз которой — целая аналитическая поверхность — так называемое исключительное множество. Этот факт не имеет аналогии в теории аналитических функций одного комплексного переменного.

Пусть $n = 2$, f — отличное от постоянной аналитическое отображение некоторого 4-мерного комплексного многообразия X комплексного числового пространства (x_1, x_2) в комплексное числовое пространство (y_1, y_2). Точка $a \in f(X)$, $A = f^{-1}(a)$. Множество $X \mid A$ отображается взаимно однозначно. Если A состоит только из одной точки, то отображение f называется «исключительно однолистным». Если A содержит по крайней мере две точки, то оно исключительное, а отображение f называется «однолистным до точки a». В этом случае a — исключительная точка отображения.

Изучается исключительное множество A и его окрестность. Множество A замкнуто, состоит или из единственной точки, или оно есть двумерное аналитическое множество без изолированных точек. Называя отображение полным, если a — внутренняя точка множества $f(X)$, и неполным, если a — граничная точка этого множества, автор особое внимание уделяет первым, так как эти отображения тесно связаны с модификациями комплексных многообразий в смысле Бенке и Штейна (Behnke H., Stein K., Math. Ann., 1951, 124, 1—16). Если A — компакт, то отображение f полное. Отсюда

следует, что каждое исключительно однолистное отображение является полным. Говорят, что имеет место модификация комплексного многообразия Y в многообразие X, если существует взаимно однозначное аналитическое отображение f множества $X \mid A$ на $Y \mid B$, где A и B — замкнутые подмножества соответственно X и Y. При этом если $x \in X \mid A$ стремится к A, то $f(x)$ стремится к B.

Если B состоит из одной точки, то модификация называется локальной. Полагаем $f(x) = a$, если $x \in A$; оказывается, что f — однолистное до точки a, полное отображение. С другой стороны, X — многообразие, получающееся локальной модификацией Y в точке a, т. е., когда a заменяется множеством $A = f^{-1}(a)\, u$; следовательно, локальная модификация Y в точке a есть обращение полного, однолистного до точки a, отображения X на Y. Исследование таких отображений и является основным предметом реферируемой работы.

Частного вида локальную модификацию, при которой точка заменяется некоторой сферой σ, автор называет σ-процессом и доказывает основной результат своей работы — теорему единственности σ-процесса, которая была им ранее опубликована без доказательства (Hopf H., Rend. mat., 1951, 10, 1—14). Эта теорема, в частности, устанавливает, что не существует никакой другой локальной модификации многообразия Y, кроме n-кратного σ-процесса с $n \geqslant 1$, если $A = f^{-1}(a)$ — компакт. Она распространена и на случай некомпактного A.

Эту теорему, как отмечает автор, можно рассматривать как функционально-теоретическое освещение леммы Зариского (Zariski O., Ann. Math., 1944, 45). Обобщения результатов и методов настоящей работы получены Штоллем (РЖМат, 1956, 1296, 6546, 6547). Библ. 10 назв.

А. В. Лебедев

6549. **Об интеграле Коши.** Данжуа (Sur l'intégrale de Cauchy. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 5, 473—476 (франц.)

Автор обобщает известные исследования Е. Бореля о моногенных функциях (Borel M., Leçons sur les fonctions monogènes, 1917, 125—163). Пусть S — ограниченное и замкнутое множество точек плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и пусть дополнение S до всей плоскости есть сумма областей ρ_i (попарно без общих точек) с такими свойствами: каждая точка границы φ_i области ρ_i есть граничная точка внешности ρ_i и φ_i есть сумма спрямляемых кривых $K_{i,\rho}$ и множества θ_i их предельных точек, причем $\sum_{i,\rho} \lambda_{i,\rho} < \infty$, где $\lambda_{i,\rho}$ — длина кривой $K_{i,\rho}$. Пусть $f(z)$ имеет конечную производную $f'(z)$ на S, где

$$f'(z) = \lim_{h \to \infty} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}\ ;\ z \in S,\ z + h \in S.$$

В предыдущей заметке (РЖМат, 1956, 2930) автор доказал, что $\int_K f(z)\, dz = 0$ ($K = \sum_{i,\rho} K_{i,\rho}$ и обход $K_{i,\rho}$ отрицательный по отношению к соответствующей области ρ_i). В этой заметке рассматривается интеграл

$$I_p(a) = \frac{p!}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{p+1}},\ (p = 0, 1, \ldots\ ;\ i = \sqrt{-1}).$$

Если S_p — множество всех таких точек a, $a \in S$, для которых при данном значении p существует

$$\int_K |\, dz\, | \cdot |\, z - a\, |^{-p-1},$$

то утверждается, что для $a \in S'_p \equiv S_p - S_p \cdot (\Sigma_i \theta_i)$ существует $I_p(a)$. Изучаются некоторые свойства этого интеграла. Доказывается, что для $a \in S'_0$ имеем

$$f(a) = 1/2\pi i \int_K f(z)\, dz / (z - a) \quad (i = \sqrt{-1}).$$

В. С. Федоров

6550. **Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квазианалитических функций.** Бадалян Г. В., Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. наук, 1953, 6, № 5, 1—63

По заданной последовательности чисел $0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n \leqslant \ldots,\ \gamma_n \to \infty,\ \sum_1^\infty \gamma_n^{-1} = \infty$ строятся обобщенные производные

$$\varphi_1(t) = \varphi'(t),\ \varphi_2(t) = (\varphi_1(t) / t^{\gamma_1 - 1})', \ldots$$

$$\ldots,\ \varphi_{k+1}(t) = (\varphi_k(t) / t^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1})', \ldots.$$

и последовательность функций

$$\omega_k(u, t) = \int_u^t t_1^{\gamma_1 - 1}\, dt_1 \int_u^{t_1} t_2^{\gamma_2 - \gamma_1 - 1}\, dt_2 \ldots$$

$$\ldots \int_u^{t_{k-1}} t_k^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}\, dt_k\ (u > 0),$$

$k = 1, 2, \ldots,\ \omega_0\ (u, t) = 1$. Доказывается обобщенная формула Тейлора

$$\varphi(t) = \sum_0^n a_k \omega_k(u, t) + R_n(u, t),$$

где $a_k = u^{-\gamma_k + \gamma_{k-1} + 1} \varphi_k(u)$ и

$$R_n(u, t) = \int_u^t \varphi_{n+1}(t_0)\, dt_0 \int_{t_0}^t t_1^{\gamma_1 - 1}\, dt_1 \ldots$$

$$\ldots \int_{t_0}^{t_{n-2}} t_{n-1}^{\gamma_{n-1} - \gamma_{n-2} - 1}\, dt_{n-1} \cdot \int_{t_0}^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1}\, dt_n.$$

Эта формула справедлива для всех функций, имеющих на интервале $0 < t \leqslant u$ $(n+1)$-ю интегрируемую производную, и при $\gamma_n = n$ она переходит в обычную формулу Тейлора. Естественным образом определяется обобщенный ряд Тейлора

$$\sum_0^\infty a_k \omega_k(u, t). \tag{1}$$

Показателем равномерной сходимости обобщенного ряда Тейлора называется точная нижняя граница тех чисел λ, для которых ряд $\sum_0^\infty a_k t^{\lambda k} \omega_k(u, t)$ равномерно сходится на интервале $0 \leqslant t \leqslant u$.

С помощью преобразования Лапласа доказано, что показатель $\varkappa$ равномерной сходимости ряда (1) равен абсциссе сходимости σ_c факториального ряда

$$\sum_0^\infty a_k / (z + \gamma_1)(z + \gamma_2) \ldots (z + \gamma_k). \tag{2}$$

Доказывается также, что если $\gamma'_k \geqslant \gamma_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $\sum_1^\infty 1/\gamma'_k = \infty$ и σ'_c — абсцисса сходимости ряда

$$\sum_0^\infty a'_k/(z+\gamma'_1)\dots(z+\gamma'_k),$$

то $\sigma'_c \leqslant \sigma_c$

Для функций, представленных обобщенным рядом Тейлора, дается следующая оценка производной: Если $\varphi(t)=\sum_0^\infty a_k\omega_k(u,t)$ в окрестности точки $u>0$; ρ — показатель сходимости чисел $\{\gamma_k\}$, σ_c — абсцисса сходимости ряда $\sum_1^\infty a_n \exp\left(-z\sum_1^n \gamma_k^{-1}\right)$ и $\rho>\sigma_c$, то

$$|\varphi^{(n)}(t)|<C(\rho)\prod_{\nu=1}^n(\rho+\gamma_k)(e^2\omega_n)\,t^{-\rho-n},\quad 0<t\leqslant u.$$

Здесь $C(\rho)>0$ — постоянная и $\omega_n=\max_{k\leqslant n}(1+k/\gamma_k)$.

Далее автор рассматривает квазианалитические классы (C_{m_n}) бесконечно дифференцируемых функций $\{\varphi(x)\}$, удовлетворяющих неравенствам $|\varphi^{(n)}(x)|\leqslant m_n$. Класс $C_{\{m\}}$ называется классом $C_{\{\dot m\}}$, если существует последовательность чисел $\{\dot m_n\}$ такая, что 1) последовательность $\dot m_n/n\dot m_{n-1}$ монотонно возрастает, 2) $\dot T(r)=\max_n(r^n/\dot m_n)\leqslant\max_n(r^n/m_n)=T(r)$, 3) $\int^\infty r^{-2}\ln\dot T(r)\,dr<\infty$.

Автор показывает, что все классы Данжуа являются классами $C_{\{\dot m\}}$. Следующий результат является основным в статье: Всякая функция, принадлежащая на сегменте $[0,2]$ некоторому классу $C_{\{\dot m_n\}}$, разлагается в сходящейся на $[0,u]$ обобщенный ряд Тейлора по последовательности $\gamma_k=m_k\delta/m_{k-1}$, $k=1,2\dots$. Здесь δ — любая величина, превосходящая некоторую постоянную, зависящую от точки u и последовательности $\{m_n\}$. Автор дает оценку этой постоянной. Б. Я. Левин

6551. **Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квазианалитических функций.** Бадалян Г. В., Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. наук, 1954, 7, № 1, 1—33

Продолжение статьи автора (реф. 6550).

Предполагается, что последовательность чисел $\{\gamma_k\}$ такова, что при $m_n=\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n$ класс $c_{\{m_n\}}$ есть класс $c_{\{\dot m\}}$ (реф. 6550) и вводится следующий метод суммирования рядов:

Суммой ряда $\sum_0^\infty c_n/z^n$ называется сумма факториального ряда

$$f(z)=c_0+\sum_1^\infty \frac{a_n}{\Pi_1^n(z+\gamma_k)},$$

где $a_n=\sum_{k=2}^{n+1}c_k s_{n+1-k}^{(n-1)}$ и $s_m^{(p)}$ определяется равенством

$$\Pi_1^n(z+\gamma_k)=\sum_0^n s_k^{(n)}z^{n-k}.$$

Доказывается, что этот метод суммирования регулярный, т. е. сумма ряда в новом смысле совпадает с обычной суммой, если таковая существует, и что если данный ряд суммируется по двум различным последовательностям $\{\gamma_k\}$ и $\{\gamma'_k\}$, то сумма получается одна и та же. Под суммой $\sum_0^\infty c_k$ понимается $\lim_{\sigma\to1}f(\sigma)$. Если $f(z)$ представляется асимптотическим рядом $f(z)\sim\sum_1^\infty \frac{c_n}{z^{n+1}}$ и ряд $\sum_1^\infty a_n\exp\left(-z\sum_1^n\gamma_k^{-1}\right)/\Pi_1^n\gamma$ имеет конечную абсциссу сходимости $\sigma_c>0$, то

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n/\Pi_1^n(z+\gamma_k)$$

и этот ряд имеет ту же абсциссу сходимости σ_c. Применяя к квазианалитическим классам, автор получает теорему: Для того чтобы существовала бесконечно дифференцируемая на $[\alpha,\infty)$ функция $\Psi(x)$, удовлетворяющая равенствам $\Psi^{(n)}(\alpha)=c_{n+1}$ и представляющаяся на $[\alpha,\infty)$ сходящимся рядом

$$\Psi(x)=\sum_0^\infty\frac{a_n}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{e^{(x-\alpha)\zeta}}{\Pi_0^n(\zeta+\gamma_k)}\,d\zeta$$

(контур C_n охватывает точки $\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n$; $\gamma_0=0$), необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\sigma_c>0$ и $\operatorname{Re}z>\sigma_c$ сходился ряд

$$f(z)=a_0+\sum_1^\infty a_n/\Pi_1^n(z+\gamma_k).$$

Далее пусть $\{\alpha_k=u\gamma_k\}$ и $\{\beta_k=v\gamma_k\}$, где u и v — произвольные комплексные числа, и пусть при некотором положительном α

$$\sum_1^\infty\exp\left\{\alpha\operatorname{Re}(u^{-1}+v^{-1})\sum_1^n\gamma_k^{-1}\right\}/\gamma_k^2<\infty.$$

Тогда совпадают особенности рядов

$$g(z)=\sum_1^\infty a_n\exp\left\{-z\sum_1^n(\alpha_k^{-1}+\beta_k^{-1})\right\}$$

и

$$f(z)=\sum_1^\infty\alpha_n\Pi_1^n\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)\Big/\left(1-\frac{z}{\beta_k}\right)$$

на границе (прямой) их общей области сходимости. Также совпадают особенности на границе общей области сходимости у рядов

$$\sum_1^\infty a_n\exp\left(-z\sum_1^n\alpha_k^{-1}\right);\ \sum_1^\infty a_n\Pi_1^n(1-z/\alpha_k);$$

$$\sum_1^\infty a_n/\Pi_1^n(1+z/\alpha_k).$$

Б. Я. Левин

6552 К. **Аналитические функции.** Сакс, Зигмунд (Analytic functions. Saks Stanislaw, Zygmund Antoni, transl. Warsaw, Poland, 1953, 451 p., 6,50 sh), Cumul. Book Index, 1954, 57, № 7, 114 (англ.)

6553 К. **Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.** Мандельбройт С., Изд-во ин. лит., 1955, 268 стр., 12 р.

Книга содержит семь глав. В первой главе «Регуляризация» дается понятие регуляризованных последовательностей и выводятся свойства регуляризации, в особенности выпуклой и экспоненциальной. Во второй главе «Теоремы о функциях, голоморфных в полосе. Обобщение проблемы Ватсона» доказывается ряд теорем единственности относительно функций, аналитических в полосе, например, следующая теорема: Пусть $F(s)\not\equiv0$ функция переменного $s=\sigma+it$, голоморфная и ограниченная в области Δ: $\sigma>\sigma_0$, $|t|<G(\sigma)$ $(G(\sigma)\geqslant\delta>0$ ... граниченной вариации) и непрерывная в $\bar\Delta$. Пусть

затем $N(\sigma)$ и $M(\sigma)$ — две такие неубывающие функции, что в Δ

$$\ln|F[\sigma+iG(\sigma)]|\leqslant M(\sigma)-N(\sigma).$$

Тогда при $\gamma>16\,G(G=\lim_{\sigma\to+\infty}G(\sigma))$ имеет место соотношение

$$\int^{\infty}[N(\sigma)-M(\sigma+\gamma)]^{+}\,e^{-S(\sigma)}\,d\sigma<\infty, \qquad (1)$$

$$S(\sigma)=\frac{\pi}{2}\int_c^{\sigma}\frac{du}{G(u)},\quad c>\sigma_0$$

(если левая часть в (1) будет равна ∞, то $F(S)\equiv 0$). На основе этой теоремы решается обобщенная проблема Ватсона (по поводу классической проблемы Ватсона и связанной с ней классической проблемы квазианалитичности см. Мандельбройт, Квазианалитические классы функций, ОНТИ, 1937), состоящая в определении необходимых и достаточных условий, которым нужно подчинить числа M_n и функцию $G(\sigma)$, чтобы из $|F(s)|\leqslant M_n e^{-n\sigma}$ $(n=1,2,\ldots)$, $s\in\Delta$, следовало $F(s)\equiv 0$.

В третьей главе «Асимптотические ряды Дирихле» вводится понятие асимптотического ряда и устанавливается основная теорема книги, выражающая собой принцип «примыкающих» рядов.

Пусть $\{\lambda_n\}$ возрастающая последовательность положительных чисел и $p_k(x)$ — неубывающая функция, стремящаяся к $+\infty$ (она может равняться $+\infty$ при больших x). Если при больших x в Δ

$$\inf_{m\geqslant k}\sup_{\sigma\geqslant x}\left|F(s)-\sum_1^m d_n e^{-\lambda_n s}\right|\leqslant e^{-p_k(x)},$$

то будем говорить, что суммы $\sum_1^m d_n e^{-\lambda_n s}$ при $m\geqslant k$ представляют $F(s)$ в Δ с логарифмической точностью $p_k(\sigma)$ (если ряд $\sum_1^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ сходится к $F(s)$, то $p_k(\sigma)=\infty$). Сформулируем основную теорему. Пусть $\overline{\lim}_{n\to\infty}(n/\lambda_n)<\infty$ и $\overline{D}^*$ — верхняя усредненная плотность $\{\lambda_n\}$ $(\overline{D}^*=\overline{\lim}_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}\int_0^{\lambda}D(x)\,dx$, $D(x)=N(x)/x$, $N(x)$ — число λ_n, меньших x). Пусть затем область $\Delta:\sigma>\sigma_0$, $|t|<G(\sigma)=\pi g(\sigma)$ такова, что $g(\sigma)>\overline{D}^*$. Если $F(s)$ регулярна в Δ, представляется в Δ суммами $\sum_1^m d_n e^{-\lambda_n s}$ при $m\geqslant k$ с логарифмической точностью $p_k(\sigma)$, продолжается из Δ вдоль канала ширины большей чем $2\pi\overline{D}^*$ в круг $C(s_0,\pi R)$ радиуса πR с центром в s_0, то при выполнении условия: имеется такое h, что $\overline{D}^*<h<g=\lim_{\sigma\to\infty}g(\sigma)$ и

$$\int^{\infty} p_k(\sigma)\,e^{2^{-1}\int^{\sigma}du/[g(u)-h]}\,d\sigma=\infty,$$

имеет место оценка

$$|d_k|\leqslant 2^{-1}\pi^2\lambda_k R e^{2\nu(R)}\,\Lambda_k^*\,M(s_0,\pi R)\,e^{\lambda_k\,\mathrm{Re}(s_0)}, \qquad (2)$$

где $M(s_0,\pi R)$ — максимум модуля $F(s)$ в указанном выше круге,

$$\nu(R)=\sup_{\lambda\geqslant 0}\int_0^{\lambda}[D(x)-R]\,dx,$$

$$\Lambda_k^*=\Pi_{m\neq k}(\lambda_m^2/|\lambda_k^2-\lambda_m^2|).$$

Доказательство этой теоремы основано на приведенной теореме единственности.

В четвертой главе «Обобщенные квазианалитические классы функций» ставится проблема: указать такие условия, связывающие $\{M_n\}$ с $\{\nu_n\}$, что если бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале I удовлетворяет условиям: при некотором $k=k(f)$ на I

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant k^n M_n\quad(n=0,1,2,\ldots) \qquad (3)$$

и в некоторой точке $d\in I$: $f(d)=f^{(\nu_n)}(d)=0$, то $f(x)\equiv 0$. Эту проблему имеет смысл рассматривать только на полупрямой или на прямой. Идея ее решения, например, в случае полупрямой заключается в следующем. Пусть

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-xe^s}f(x)\,dx;$$

$F(s)$ — регулярна в области Δ_a: $\sigma>a$, $|t|<\arccos e^{a-\sigma}=\pi g_a(\sigma)$ и в этой области $|F(s)|\leqslant M_0 e^{-a}$. Интегрируя по частям и применяя (3), получаем

$$\left|F(s)-\sum_1^m f^{(n-1)}(0)\,e^{-ns}\right|\leqslant e^{-m\sigma}M_m e^{-a},$$

или, так как $f^{(\nu_n)}(0)=0$ (полагаем $d=0$),

$$\left|F(s)-\sum f^{(q_n)}(0)\,e^{-(q_n+1)s}\right|\leqslant e^{-m\sigma}M_m e^{-a},$$
$$\{q_n\}=\{n\}-\{\nu_n\}.$$

Следовательно, ряд $\Sigma f^{(q_n)}(0)\,e^{-(q_n+1)s}$ представляет $F(s)$ в Δ_a асимптотически относительно функции $e^{-a-B(\sigma)}$, где $B(\sigma)=\sup_{n\geqslant 1}(n\sigma-\ln M_n)$. При определенных условиях на $B(\sigma)$ и $\{\nu_n\}$ функция $F(s)$ будет удовлетворять условиям основной теоремы и для $d_n=f^{(q_n)}(0)$ получится оценка вида (2), из которой, учитывая $|F(s)|\leqslant M_0 e^{-a}$, найдем: $d_n=0$ и $F(s)\equiv 0$. Значит, $f(x)\equiv 0$. Таким образом получается теорема относительно обобщенной квазианалитичности. Других теорем относительно квазианалитичности, а также обратных теорем приводить не будем.

Пятая глава «Теоремы единственности» посвящена применению основного неравенства (2) к различным вопросам единственности. Сперва находится соотношение, которому должны удовлетворять функция $F(x)$ и последовательность $\{\nu_n\}$, $\nu_{n+1}-\nu_n>a>0$, для того чтобы из условий

$$\int_0^{\infty}\frac{d\Phi(x)}{F(x)}=\int_0^{\infty}\frac{x^{\nu_n}\,d\Phi(x)}{F(x)}=0\quad(n=1,2,\ldots)$$

следовало $\Phi(x)=\mathrm{const}$. Этим также решается вопрос о полноте и замкнутости системы $\{x^{\nu_n}/F(x)\}$ на $(0,\infty)$.

Затем решаются следующие проблемы моментов: пусть $S(t)$ и $H(t)$ — неубывающие функции такие, что

$$S(0)=0,\ \int_0^{\infty}t^{\nu_n}\,dS(t)=m_n;\ \lim_{t\to-\infty}H(t)=0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^{\nu_n}\,dH(t)=m_n.$$

Требуется указать соотношения между $\{m_n\}$ и $\{\nu_n\}$, при которых эти функции, удовлетворяющие указанным условиям, будут единственными.

В шестой главе «Классы бесконечно дифференцируемых функций» решается проблема эквивалентности классов функций. Так, обозначая, например, через $C_R(M_n)$ класс бесконечно дифференцируемых функций на всей прямой, каждая из которых ограничена на прямой и удовлетворяет неравенствам $|f^{(n)}(x)| \leqslant k^n M_n$ $(n \geqslant 1, -\infty < x < \infty)$, где k зависит только от f, ставится и решается задача: при каких условиях на $\{M_n\}$ и $\{M_n'\}$ классы $C_R(M_n)$ и $C_R(M_n')$ эквивалентны.

Седьмая — последняя глава «Аналитическое продолжение рядов Дирихле» посвящена применению основного неравенства (2) к изучению функций, представимых рядами Дирихле (асимтотически или в обычном смысле). А. Ф. Леонтьев

6554 К. Интерполяционная задача Абеля — Гончарова. Е в г р а ф о в М. А., М., Гостехиздат, 1954, 127 стр., 2 р. 90 к.

Задача Абеля — Гончарова состоит в определении аналитической функции $F(z)$ по известным данным $F^{(n)}(\lambda_n)$ $(n = 1, 2. . .)$, где $\lambda_1, \lambda_2, . . .$ — те или иные узлы интерполяции. Книга содержит шесть глав. В первой и частично во второй главах излагаются методы В. Л. Гончарова и И. И. Ибрагимова решения интерполяционной задачи Абеля — Гончарова и метод А. О. Гельфонда решения более общей интерполяционной задачи. В остальной части книги автор излагает свои собственные исследования задачи Абеля—Гончарова, причем в качестве узлов интерполяции берутся в основном либо точки $\lambda_n = n^{1/\rho}$, либо точки

$$\lambda_n = \lambda(n),\ \lambda'(n) > 0,\ \lim_{n\to\infty} n\lambda'(n)/\lambda(n) = 1/\rho. \qquad (1)$$

По аналогии с исследованием задачи в частном случае $\lambda_n = n$, проведенным А. О. Гельфондом, автор рассматривает функции

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)\,\Phi(zt)\,dt, \qquad (2)$$

где $\Phi(z)$ — некоторая фиксированная функция (если $\lambda_n = n$, то $\Phi(z) = e^z$), $f(t)$ регулярна в бесконечности и C — замкнутый контур, содержащий внутри себя все особенности $f(t)$. Для таких функций

$$F^{(n)}(\lambda_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)\,t^n\,\Phi^{(n)}(\lambda_n t)\,dt. \qquad (3)$$

На основании представлений (2) и (3) получается следующая связь между интерполяцией и возможностью представления функций с помощью системы

$$\{t^n \Phi^{(n)}(\lambda_n t)\}: \qquad (4)$$

1) если особенности $f(t)$ лежат в области, в которой при любом z

$$\Phi(z\,t) = \sum_0^\infty P_n(z)\,t^n\,\Phi^{(n)}(\lambda_n t),$$

то тогда $F(z)$ разлагается в интерполяционный ряд Абеля — Гончарова

$$F(z) = \sum_0^\infty F^{(n)}(\lambda_n)\,P_n(z)$$

(таким путем выделяется класс сходимости), 2) если особенности (t) лежат в области, в которой система (4) полна, то тогда из условия $F^{(n)}(\lambda_n) = 0$ следует $F(z) \equiv 0$ (таким путем выделяется класс единственности). В силу этого задача выделения класса сходимости и класса единственности сводится к выделению области, в которой система (4) образует базис или является полной.

Вопросами полноты и базиса системы аналитических функций занимались и раньше; общие положения в этих вопросах были разработаны А. И. Маркушевичем. Однако на основании имеющихся исследований нельзя было получить точных представлений об области базиса или полноты системы (4). По этой причине автор занялся детальным исследованием области базиса системы (4), опираясь на тот факт, что если одна система образует базис в области D, то тогда другая система, в некотором смысле близкая к первой, также образует базис в области D. Используя метод функциональных уравнений, автор получил следующую теорему:

Пусть $\varphi_n(z)$ регулярны в области $\overline{D}$,

$$z^n \varphi_n(z) = \psi(z)[\varphi(z)]^n + [\varphi(z)]^{n+1}\psi_n(z),$$
$$\max_{z\in D}|\psi_n(z)| = \varepsilon_n \to 0 \qquad (5)$$

(здесь $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, $w = \varphi(z)$ регулярна и одно листна в $\overline{D}$, которую отображает на круг $|w| \leqslant R$, $\psi(z)$ регулярна и отлична от нуля в $\overline{D}$). Тогда любая функция $f(z)$, регулярная в $\overline{D}$, может быть разложена в D в ряд по $z^n\varphi_n(z)$. Путем надлежащего выбора функции $\Phi(z)$ удается получить представление (5) для системы $z^n\varphi_n(z) = z^n\Phi^{(n)}(\lambda_n z)$ в случае $\lambda_n = n^{1/\rho}$. В итоге получается теорема: Пусть $\rho < 1$ и

$$\Phi(z) = \prod_1^\infty (1 + z/n^{1/\rho}),$$

тогда классом сходимости интерполяционной задачи Абеля — Гончарова будет класс функций $F(z)$, для которых функции $f(t)$ формулы (2) имеют все особенности в области

$$|v(t)\,e^{v(t)/\rho}| < \rho/e, \qquad (6)$$

где $v(t) = t/u(t)$, а $u(t)$ — решение уравнения

$$(\pi\rho/\sin\pi\rho)\,u(t)\,[1 + u(t)]^{\rho-1} = 1,\ u(0) > 0).$$

В случае узлов (1) представление (5) получить не удается. Учитывая, что любую функцию можно разложить в ряд по функциям системы (4), если можно разложить в такие ряды степени z^k $(k = 0, 1, 2, . . .)$, исследуется возможность представления

$$z^k = \sum A_{k,p}\,z^p\Phi^{(p)}(\lambda_p z). \qquad (7)$$

Существенным звеном в этом исследовании является найденная оценка коэффициентов $A_{k,p}$ в общем случае узлов (1) через коэффициенты $A_{k,p}$ для случая $\lambda_n = n^{1/\rho}$. С помощью ее, исходя из того, что при $\lambda_n = n^{1/\rho}$ представление (7) имеет место (в силу сформулированной выше теоремы), показывается, что представление (7) имеет место и в общем случае в той же области.

В результате получается основная теорема: Пусть $\rho < 1$ и

$$\Phi(z) = \prod_1^\infty (1 + z/\lambda(n)).$$

Тогда классом сходимости рассматриваемой задачи при узлах (1) будет класс функций $F(z)$, для которых функции $f(t)$ формулы (2) имеют все особенности в области (6). Улучшить эту теорему оказывается (в некотором смысле) невозможно.

В конце показывается, как предыдущие исследования можно применить к решению задачи С. Н. Бернштейна: найти наименьший тип σ целой функции $F(z)$ первого порядка такой, что $F(z)$ и все ее производные имеют внутри единичного круга хотя бы по одному нулю.

А. Ф. Леонтьев

См. также: 6378, 6588

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6555. О некоторых свойствах интегралов динамических уравнений П. В. Воронца. Шульгин М. Ф., Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 54, 131—136

Приемом, встречающимся во многих работах автора, к уравнениям П. В. Воронца присоединяются еще уравнения относительно дополнительных «избыточных» координат и устанавливается ряд предложений об интегралах исходной и расширенной систем. Характер многих предложений тот же, как и в других работах.

Теорема в рубрике 5 может быть доказана без избыточных координат. Референт не видит значения избыточных координат для интегрирования уравнений динамики. Уравнения (5) по существу совпадают с уравнениями (2). В. В. Добронравов

6556. Об одной теореме Пенлеве. Винтнер (On a theorem of Painlevé. Wintner Aurel), Arch. Math., 1955, 6, № 6, 439—441 (англ.)

Рассматривается система

$$dw_i/dz = f_i(z, w_1, w_2, \ldots, w_n),\ i = 1, 2, \ldots, n, \quad (1)$$

где $z \subset D$, $w_k \subset G$, $k = 1,2, \ldots, n$, а $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — регулярные функции в топологическом произведении $D \times G$ областей D и G. Пусть $w_1(z)$, $w_2(z), \ldots, w_n(z)$ — решение системы (1), регулярное в области $D_0 \subset D$. Пусть это решение имеет особую точку $z_0 \subset D$. Исследуется вопрос о характере особенности. Устанавливается, что если Γ — жорданова дуга, лежащая в D_0 и оканчивающаяся в z_0, то вдоль нее $\Sigma_{i=1}^{n} |w_i(z)| \to \infty$ при $z \to z_0$. При $n = 1$ соответствующий результат был получен Пенлеве (Painlevé P., Leçons sur la théorie analytique des équations differentielles prefessées a Stockholm, Paris, 1897). Н. И. Гаврилов

6557. О разрывных решениях обыкновенных квазидифференциальных уравнений. Микеладзе Ш. Е., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 4, 641—644

С помощью нормальной фундаментальной системы решений квазидифференциального уравнения

$$\rho_0 \frac{d}{dx} \rho_1 \frac{d}{dx} \cdots \rho_{n-1} \frac{d}{dx} \rho_n y + py = 0$$

выписывается решение, которое вместе со своими квазипроизводными имеет разрывы первого рода с заданными скачками в некотором конечном числе точек. При построении нормальной фундаментальной системы решений предполагается существование и непрерывность повторных интегралов в рядах, получаемых из соответствующих интегральных уравнений по методу последовательных приближений. Функции $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n$ могут быть кусочно-непрерывными с конечным числом точек разрыва на рассматриваемом интервале.

Л. А. Чудов

6558. О колеблемости решений уравнения $u'' + p(x)u = 0$. Петропавловская Р. В., Докл. АН СССР, 1955, **105**, №, 29—31

Формулируются достаточное условие колеблемости решений уравнения $u'' + p(x)u = 0$ (функция $p(x)$ ограничена снизу и $\int_a^x p\,dt$ при $x \to \infty$ не стремится ни к конечному, ни к бесконечному пределу) и несколько условий неколеблемости решений таких уравнений. Результаты являются очевидными следствиями необходимых и достаточных условий, доказанных референтом (Докл. АН СССР, 1946, **51**, № 8, 573—576; 1949, **68**, № 5, 813—816) при стандартном выборе $\theta = \int_a^x (\beta - p) \times \times d\xi + C$. Для доказательства колеблемости $\beta = 0$ или $\beta = |p|$, — неколеблемости $\beta = -\varphi^2 + \psi$, где $\psi > 0$.

М. И. Ельшин

6559. Об одном условии неколеблемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. Павлюк И. А., Студ. наук. праці Київськ. ун-ту, 1955, зб. 16, 73—82

Приводится критерий неколеблемости решения дифференциального уравнения

$$z'' + q(x)z = 0, \quad (1)$$

где $q(x)$ — функция, непрерывная на промежутке (a, b). Пусть существует положительная дважды непрерывно дифференцируемая на (a, b) функция $\varphi(x)$ такая, что для всех $x \in (a, b)$ выполняется условие

$$q(x) \leqslant \frac{1}{4}(\varphi'/\varphi)^2 - \frac{1}{2}(\varphi''/\varphi). \quad (2)$$

Тогда все решения уравнения (1) являются неколеблющимися на (a, b). Этот критерий обобщает известный критерий Кнезера. Если $q(x)$ непрерывна на (a,∞), то из (2) выводится частное условие $\int_a^\infty q(x)\,dx \leqslant \frac{1}{4a}$, обеспечивающее неколеблемость решений уравнения (1) на (a, ∞). Это условие дополняет результаты Р. В. Петропавловской (реф. 6558).

В процессе доказательства показано, что всякое уравнение вида $y'' + p(x)y' + (q(x) + s')y = 0$, где s — корень уравнения $s^2 + p(x)s + q(x) = 0$, интегрируется в квадратурах. Аналогичные критерии известны из работ М. И. Ельшина (Докл. АН СССР, 1949, **68**, № 2, 221—224). Г. Л. Мизернюк

6560. О задаче Пуанкаре, связанной с уравнением Риккати. Хартман, Винтнер (On a problem of Poincaré concerning Riccati's equation. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 4, 791—804 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$x'' + f(t)x = 0 \quad (1)$$

в предположении, что существует конечный предел

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \omega. \quad (2)$$

Если $\omega < 0$, то известно (Пуанкаре), что логарифмические производные $w = z'/z$ действительных решений $x = z(t)$ уравнения (1) имеют пределы

$$\lim_{t \to \infty} w^2(t) = -\omega. \quad (3)$$

Если $\omega \geqslant 0$, то решения могут колебаться, и отношение z'/z теряет смысл. Можно рассматривать комплексные решения вида $z = x(t) + iy(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ — действительные линейно независимые решения уравнения (1); тогда $z \neq 0$. Но и для таких решений при $\omega \geqslant 0$ из (2) не следует (3). Исследуются дополнительные ограничения, при которых такая теорема для комплексных решений будет справедлива.

Один из результатов: если $f(t)$ монотонна, то при $\omega > 0$ из (2) следует (3); при $\omega = 0$ монотонности $f(t)$ недостаточно. Доказано, что условие (2) можно заменить более общим условием Хартмана (Trans. Amer. Math. Soc., 1948, 63, 560—580). И. М. Соболь

6561. **Определение динамических параметров систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями не выше второго порядка, по осциллограммам переходного процесса. Цыпкин Я. З.**, Тр. Всес. заоч. энерг. ин-та, 1955, вып. 6, 3—9

Предполагается, что система описывается линейным дифференциальным уравнением

$$T_0^2 \frac{d^2x}{dt^2} + T \frac{dx}{dt} + x = \varphi(t)$$

с неизвестными постоянными коэффициентами T_0^2 и T (в частном случае может быть $T_0 = 0$). Для экспериментального определения этих коэффициентов к системе прикладывается внешнее воздействие любой формы и записывается свободное движение системы $x(t)$, которое будет иметь место после полного прекращения внешнего воздействия, т. е. при $\varphi(t) = 0$. Приведены формулы и графики для вычисления T_0 и T_1 на основании указанной экспериментальной записи кривой $x(t)$.

Е. П. Попов

6562. **Исследование вопроса о колебаниях и устойчивости решений уравнения второго порядка. Зубова А. Ф.**, Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 1, 14—17

Рассматриваемое уравнение

$$u'' + p(x)u = 0, \quad (1)$$

где $p(x)$ — непрерывная вещественная периодическая функция, включается в семейство уравнений

$$u'' + [p(x) + \lambda]u = 0, \quad (2)$$

где λ — вещественный параметр. Для уравнений (2) по методу Ритца определяются последовательности собственных значений задач с периодическими и антипериодическими граничными условиями. По теореме Хаупта эти последовательности, расположенные в возрастающем порядке, выделяют последовательные зоны устойчивости и неустойчивости решений уравнения (2). Вопрос об устойчивости решений уравнения (1) решается принадлежностью $\lambda = 0$ к зоне устойчивости или неустойчивости. Формулируются необходимые и достаточные условия в терминах числа перемен знаков в последовательностях определителей матриц коэффициентов квадратичных форм, полученных в применении метода Ритца. М. И. Ельшин

6563. **О выборе асимптотических значений для решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. Хартман, Винтнер** (On the assignment of asymptotic values for the solutions of linear differential equations of second order. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 3, 475—483 (англ.)

Выделяется класс дифференциальных уравнений

$$y'' + g(t)y' + f(t)y = 0$$

с непрерывными при $t \geqslant 0$ коэффициентами, имеющих решения, обладающие асимптотическим «начальным условием» $\lim_{t \to \infty} y = \text{const} \neq 0$. Доказывается, что если $\int_0^\infty t\,|f(t)|\,dt < \infty$; $g(t) \leqslant 0$ или $\int_0^\infty |f(t)|\,dt < \infty$ и $g(t) \leqslant \text{const} < 0$, то существует решение, имеющее предел $\lim_{t \to \infty} y = 1$, все же независимые с ним решения растут неограниченно. Если же $\int_0^\infty |f(t)|\,dt < \infty$; $\operatorname{Re} g(t) \geqslant \text{const} > 0$, то каждое решение уравнения при $t \to \infty$ имеет определенный конечный предел. Эти факты могут быть легко получены из исследований Пуанкаре, Перрона и Шпета (ср. Späth H., Math. Z., 1929, 30, 487—513). М. И. Ельшин

6564. **Об ограниченности решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. Беллман** (Boundedness of the solutions of second order linear differential equations. Bellman Richard), Duke Math. J., 1955, 22, № 4, 511—513 (англ.)

Рассматриваются условия ограниченности решений уравнения

$$u'' + (1 + f(t))u = 0. \quad (1)$$

Л. А. Гусаров (РЖМат, 1955, 734) установил, что все решения (1) будут ограничены, если выполнены три условия: (a) $1 + f(t) \geqslant a^2 > 0$, (b) $f'(t)$ непрерывна, (c) $f'(t)$ с ограниченным изменением на (t_0, ∞).

В реферируемой статье дается новое доказательство теоремы Гусарова и показывается, что условие (c) может быть заменено условием $\int^\infty |f''(t)|\,dt < \infty$, и указано, что можно получить условие ограниченности решений, накладывая ограничения на производные высших порядков. В. В. Немыцкий

6565. **Суммирования производных разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля. Саргсян И. С.**, Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 6, 821—824

Изучается задача

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty), \quad (1)$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \quad (2)$$

в предположении отсутствия отрицательного спектра. Пусть $f(x) \in L^2(0, \infty)$. Референтом доказано (РЖМат, 1953, 734), что разность между разложением функции $f(x)$ по собственным функциям задачи (1)—(2) и разложением этой функции в обычный интеграл Фурье по косинусам стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале. В реферируемой заметке ставится вопрос о поведении формально продифференцированного разложения функции $f(x)$ по собственным функциям задачи (1) — (2).

Доказывается следующая теорема: Если функция $q(x)$ ограничена в каждом конечном интервале и $f(x) \in L^2(0, \infty)$, то средние по Риссу ε первого порядка между первыми производными разложений функции $f(x)$ по собственным функциям задачи (1) — (2) и разложением этой функции в обычный интеграл Фурье стремятся к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Эта теорема обобщается на дифференцирования высших порядков. Приводятся некоторые другие результаты. Имеются неточности: так, например, в формуле

(10) вместо $\frac{\partial^2\theta(x, x; \mu)}{\partial x^2}$ должно быть $\frac{\partial^2\theta(x, s; \mu)}{\partial x\, \partial s}\Big|_{s=x}$.

Б. М. Левитан

6566. Об асимптотическом распределении собственных значений. Титчмарш (On the asymptotic distribution of eigenvalues. Titchmarsh E. C.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 19, 228—240 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$d^2\psi / dx^2 + \{\lambda - q(x)\}\,\psi = 0 \qquad (1)$$

на всей оси. Предполагается: $q(x)$ непрерывна, q', q'', q''' существуют, $q(x) \uparrow \infty$ при $|x| \to \infty$ и для любого фиксированного $a > 1$ $q(ax) = O\{q(x)\}$, $q'(ax) = O\{q'(x)\}$, $q''(ax) = O\{q''(x)\}$. Известно, что при этом спектр дискретный.

Доказывается: собственные значения λ_m, соответствующие (1) (начиная с некоторого), являются корнями уравнения вида

$$\int_{X'}^{X} \sqrt{\lambda - q(x)}\, dx = (n + {}^1/_2)\,\pi + o(1),$$

где m—целое, а X и X'— положительный и отрицательный корни уравнения $q(x) = \lambda$ ($\lambda > \inf q(x)$).

Изучен также случай полуоси при различных условиях в нуле. Аналогичные результаты были известны ранее при более жестких предположениях, как, например: $q(x)$ — аналитическая функция; $q(x)$ — целая.

Р. А. Александрян

6567. О существенном спектре обыкновенных дифференциальных операторов. Хартман (On the essential spectra of ordinary differential operators. Hartman Philip), Amer. J. Math., 1954, 76, № 4, 831—838 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$y'' + (\lambda + q)\, y = 0 \qquad (1)$$

на полуоси $0 \leqslant t < +\infty$, где $q(t)$ вещественна и непрерывна.

Если для (1) имеет место случай предельной точки, то множество S' предельных точек спектра, соответствующего однородному условию при $t = 0$, называется существенным спектром уравнения (1).

Доказано: а) если $q(t) > 0$ не убывает, $q(t) \uparrow \infty$ при $t \to \infty$ и либо $q(t) = o(t^2)$, либо для некоторого $\mu > 1$ $\int^{\infty} q^{-\mu/2} dt = \infty$, то для (1) имеет место случай точки и S' есть вся ось; б) если $q(t) \leqslant C$ (следовательно, имеет место случай предельной точки) и $\lambda = 0$ принадлежит S', то существует постоянная α (зависящая лишь от C) такая, что для всех достаточно больших $\lambda > 0$ интервал $[\lambda, \lambda + \alpha\sqrt{\lambda}]$ содержит хоть одну точку из S'; в) существуют непрерывные $q(t) \leqslant C$ такие, что S' состоит лишь из точек $\lambda = n^2$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Р. А. Александрян

6568. Об определении потенциала частицы по ее S-функции. Крейн М. Г., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 3, 433—436

Устанавливаются следующие достаточные условия для того, чтобы функция S являлась S-функцией основного состояния частицы в центрально-симметрическом поле с потенциалом: 1) $|S(k)| = S(0) = 1$; 2) $S(-k) = \overline{S(k)}$ ($-\infty < k < \infty$); 3) $\arg S(k) \to \arg S(0) - 2m\pi$ при $k \to \infty$ (m — целое); 4) $S(k) = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikt}\, s(t)\, dt$, где $s(t) \in L_1(0, \infty)$.

Указывается способ построения $V(r)$ по $S(k)$, основанный на работах автора по обратной задаче Штурма — Лиувилля (РЖМат, 1955, 5068). В случае рациональной $S(k)$ этот способ приводит к явному выражению для $V(r)$. В общем случае $V(r)$ может быть обобщенной функцией типа D_1 (производная от локальноинтегрируемой функции). Класс потенциалов, получаемых указанным в статье способом, содержит все функции, удовлетворяющие условиям: 1) $rV(r) \in L_1(0, \infty)$; 2) решение φ системы $\varphi'' - V(r)\varphi = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ является неограниченным.

Л. А. Чудов

6569. Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн. Марченко В. А., Докл. АН СССР, 1955, 104, № 5, 695—698

Рассматриваются вопросы восстановления дифференциального уравнения

$$u''(x) - V(x)\, u(x) + \mu u(x) = 0 \quad (u(0) = 0) \qquad (1)$$

по его спектральной функции. Сведение этого вопроса к решению линейного интегрального уравнения дано в работах И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана (Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, 15, 309) и М. Г. Крейна (РЖМат, 1953, 235). В этой работе, тесно связанной с другой работой автора (Тр. Моск. матем. о-ва, 1951, 1, 328), при выполнении условия $\int_0^{\infty} x\,|V(x)|\, dx < \infty$ дается вывод и доказывается существование единственного решения линейного интегрального уравнения, к которому сводится задача восстановления дифференциального уравнения (1). Это уравнение имеет вид

$$f(x, y) + A(x, y) + \int_x^{\infty} f(y, t)\, A(x, t)\, dt = 0,$$

где $f(x, y)$ определяется по фазе $\eta_0(\lambda)$ ($0 \leqslant \lambda < \infty$), собственным значениям $-\mu_k$ и нормировочным коэффициентам m_k, которые находятся из асимптотических формул при $x \to \infty$ для нормированных решений $U(\lambda, x)$ ($\lambda > 0$) и собственных функций $U(\lambda_k, x)$, соответствующих отрицательным собственным функциям, уравнения (1):

$$U(\lambda, x) \approx \sqrt{2/\pi}\, \sin[\lambda x + \eta_0(\lambda)] \quad (\lambda^2 > 0,\ \lambda = \sqrt{\mu}),$$

$$U(\lambda_k, x) \approx m_k e^{-\lambda_k x} \quad (\lambda_k = \sqrt{-\mu_k}).$$

Здесь коэффициенты $\sqrt{2/\pi}$, m_k выбраны из условия

$$\delta(x - y) = \int_0^x U(\lambda, x)\, U(\lambda, y)\, d\lambda + \Sigma_k\, U(\lambda_k, x)\, U(\lambda_k, y).$$

З. И. Биглов

6570. Замечание о характеристическом определителе краевой задачи. Зламал (Eine Bemerkung über die charakteristische Determinante einer Eigenwertaufgabe. Zlámal Miloš), Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 2, 175—179 (нем.; рез. русс.)

Рассматривается краевая задача

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\, y = \lambda\,[b_k(x)\, y^{(k)} + \ldots + b_0(x)\, y];\ n > k, \qquad (1)$$

$$U_\nu(y) = \sum_{i=1}^{n-1} [\alpha_\nu^i y^{(i)}(a) + \beta_\nu^i y^{(i)}(b)] = 0,\ \nu = 1, \ldots, n.$$

Пусть $y_1(x, \lambda), \ldots, y_n(x, \lambda)$ — решение краевой задачи $y_s^q(a) = e_{s, q+1}$, $s = 1, \ldots, n$, $q = 0, \ldots, n-1$. Тогд относительно детерминанта $D(\lambda) = \mathrm{Det}\,|U_r(y_s)|$, $r, s =$

$= 1, \ldots, n$, называемого характеристическим детерминантом этой задачи, доказывается теорема

Теорема. Пусть $a_\nu(x)$, $b_\nu(x)$ — непрерывные в интервале $\langle a, b\rangle$ функции и α_ν^i, β_ν^i — полиномы от λ. Тогда характеристический определитель краевой задачи (1) будет целой функцией порядка $\rho \leqslant 1/(n-k)$. Из этой теоремы следует, что если $n > k+1$, то или краевая задача имеет бесконечное множество собственных значений, или ее характеристический определитель является полиномом. Далее, для собственных значений из нее вытекает асимптотическая формула

$$\lambda_\nu = o\left(\nu^{(k-n)/(1+\varepsilon)}\right),$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

З. И. Биглов

6571. Почти периодические решения нелинейного уравнения с малым параметром. Халанай (Soluţii aproape periodice pentru o ecuaţie neliniară cu parametru mic. Halanay A.), Rev. Univ. «C. I. Parhon» şi Politehn. Bucureşti. Ser. ştiinţ. natur., 1955, № 6-7, 39—45 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + p(x)\,x + \mu f(x, t, \mu) = 0, \qquad (1)$$

где: 1) $p(t)$ — почти периодическая и удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование двух почти периодических решений $u(t) < 0$, $v(t) < 0$ для уравнения $\ddot{y} + y^2 + p(x) = 0$ (в частности, $p(t) < 0$); 2) $f(x, t, \mu)$ — почти периодическая относительно t и $f(x_1, t, \mu) - f(x_2, t, \mu) < M\,|x_1 - x_2|$ для $|x_1| < A$, $|x_2| < A$. Тогда для достаточно малого μ уравнение (1) имеет единственное почти периодическое решение в интервале $|x| < A$. При некоторых дополнительных ограничениях это решение может быть построено быстро сходящимся процессом последовательных приближений.

Резюме автора

6572. Изучение траекторий, которые стремятся к предельному циклу в трехмерном пространстве. Гомори, Хас (A study of trajectories which tend to a limit cycle in threes-space. Gomory R. E., Haas F.), Ann. Math., 1955, 62, № 1, 152—161 (англ.)

Рассматривается система уравнений

$$dX/dt = F(x), \qquad (1)$$

где X — трехмерный вектор и F — вектор с аналитическими компонентами. Допускается, что система (1) имеет предельный цикл C. В окрестности C вводится система локальных координат y_1, y_2 и θ, где θ — угловая координата, меняющаяся вдоль цикла в пределах от 0 до 2π, y_1 и y_2 — декартовы координаты в плоскостях, ортогональных C. Ссылаясь на еще не опубликованные работы Лефшеца и Делиберто, автор считает, что $(y_1, y_2\theta)$ — аналитические функции, (x_1, x_2, x_3)-компонент вектора X. Далее вводится еще одна система координат σ, θ и $\bar{u}$, где $\sigma = \sqrt{y_1^2 + y^2}$; $\bar{u}$ — единичный вектор с координатами $(y_1/\sigma, y_2/\sigma)$. В этих новых координатах система принимает вид:

$$d\theta/dt = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^i D_i(u_1, u_2, \theta),$$

$$d\sigma/dt = \sum_{s=1}^{\infty} \sigma^s A_s(u_1, u_2, \theta),$$

$$du/dt = \sum_{s=1}^{\infty} \sigma^s B_s(u_1, u_2, \theta),$$

где A_s, B_s и D_i — периодические функции θ. Основным является следующее определение: Пусть задано фиксированное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим тор T': $(y_1^2 + y_2^2 = \varepsilon)$.

Пусть S_1 — некоторая траектория, приближающаяся к предельному циклу C, точку (y_1, y_2, θ) по S_1 проектируем в точку $(\varepsilon y_1/\sigma, \varepsilon y_2/\sigma, \theta)$ на поверхности тора T'. Некоторую точку $q \in T^1$ назовем предельной точкой для S_1, если существует последовательность $t_n \to \infty$ такая, что образы точек траектории S', соответствующие этой последовательности значений параметра, стремятся к $q \in T^2$. Структура множества L предельных точек и характеризует, по мысли авторов, способ приближения траектории S к предельному циклу. Некоторую точку L в плоскости $\theta = \theta_0$ на поверхности T^2 назовем предельным направлением траектории S. В этих терминах устанавливается теорема: Пусть задано дифференциальное уравнение $dX/dt = F(x)$, где F и X — вектора, и пусть компоненты вектора F — аналитические функции компонент вектора X. Предположим дополнительно, что заданная система уравнений имеет предельный цикл. Тогда, кроме исключительного случая S, приближаемся к S одним из следующих способов: либо S имеет одно и то же конечное число предельных направлений в каждой поверхности сечения, или каждое направление в каждой поверхности сечения C есть предельное направление для S. Исключительный случай может наблюдаться, когда $B_0 \not\equiv 0$ и выполнены еще некоторые дополнительные условия. При этих обстоятельствах на поверхностях сечения может быть бесчисленное множество как предельных, так и непредельных направлений.

В. В. Немыцкий

6573. Неустойчивость младшего характеристического показателя правильной системы. Виноград Р. Э., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 4, 541—544

Приводится пример правильной системы второго порядка, оба характеристических показателя которой неустойчивы; более точно: указано такое сколь угодно малое изменение коэффициентов правой части системы, что один показатель совершает скачок вверх, а другой — вниз на такую же величину. Заметка дополняет исследования автора (РЖМат, 1956, 5231) и Б. Ф. Былова (РЖМат, 1954, 5123) об устойчивости характеристических показателей правильных систем.

Д. М. Гробман

6574. Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Курцвейль Ярослав, Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 3, 435—438 (рез. англ.)

Рассматривается система уравнений

$$dx_i/dt = f_i(x_1, \ldots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

где функции f_i определены и непрерывны при $t \geqslant 0$ в открытом множестве G, содержащем точку $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Даются (без доказательства) необходимые и достаточные условия существования функции $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенно положительной, допускающей в G высший предел, неограниченно возрастающей при приближении к границе G и такой, что производная dV/dt в силу уравнений (1) является функцией определенно отрицательной в G. Эти условия обобщают результаты И. Г. Малкина (РЖМат, 1955, 211), В. И. Зубова (РЖМат, 1956, 5230), Е. А. Барбашина и референта (РЖМат, 1955, 728). Подчеркивается, что в предположении лишь непрерывности функций f_i можно доказать существование функции Ляпунова $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, имеющей непрерывные производные любого порядка по переменным $x_1, \ldots, x_n, t$.

Н. Н. Красовский

6575. К обращению первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Курцвейль Яро-

с л а в, Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 3, 382—398 (рез. англ.)

Рассматривается система уравнений

$$dx_s/dt = X_s(x_1, \ldots, x_n, t), \quad s = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

где функции X_s определены, непрерывны и имеют непрерывные производные $\partial X_s/\partial x_j$ в области $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < H^2$, $t \geqslant 0$, причем $X(0, \ldots, 0, t) = 0$. Нулевой интеграл $x_s = 0$ устойчив равномерно, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $x_1^2(x_{j0}, t_0, t) + \ldots + x_n^2(x_{j0}, t_0, t) < \varepsilon^2$ при всех $t \geqslant t_0$ и $t_0 \geqslant 0$, если $x_{10}^2 + \ldots + x_{n0}^2 < \delta^2(\varepsilon)$. Основным результатом статьи является следующая теорема, обращающая достаточные условия равномерной устойчивости, указанные К. П. Персидским (Изв. физ. матем. об-ва Казанск. Гос. ун-та, 1936—1937, 8): Если нулевой интеграл системы (1) равномерно устойчив, то для любого h, $0 < h < H$, существует функция $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка по всем аргументам, определенно положительная и допускающая бесконечно малый высший предел в области $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < h^2$, причем производная dV/dt в силу уравнений (1) есть функция, знакоотрицательная при $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < h^2$. Аналогичная теорема при несколько более жестких требованиях гладкости функций X_i доказана иным путем референтом (РЖМат, 1956, 1336).

Н. Н. Красовский

6576. Вопросы устойчивости решений системы двух линейных дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами. Я к у б о в и ч В. А., Матем. сб., 1955, 37, № 1, 21—68

Указанные в заглавии системы можно записать в виде

$$d\mathbf{x}/dt = JH(t)\mathbf{x}, \qquad (1)$$

$\mathbf{x}$ — вектор, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \beta(t) & \gamma(t) \end{pmatrix}$, α, β, γ — интегрируемые по Лебегу периодические функции периода ω. Скажем, что система (1) устойчива, если все ее решения ограничены (т. е. устойчивы по Ляпунову). Несколько уточненная теорема приводимости гласит: Если $X(t)$ — матрица фундаментальной системы решений (1), $X(0) = E$, то $X(t)$ представима в виде

$$X(t) = P(t)\, e^{Kt}, \qquad (2)$$

где $P(t)$ и K — вещественные матрицы, причем $P(0) = E$, $\operatorname{Det} P(t) \equiv 1$, $P(t)$ — периодическая или антипериодическая матрица, dP/dt существует почти всюду и суммируема, а $\operatorname{Sp} K = 0$. Здесь

$$K = \omega^{-1} \ln[\pm X(\omega)]; \qquad (3)$$

знак берется так, чтобы K была вещественна. Представление (2) устанавливает соответствие между матрицами $A(t) = JH(t)$ (системами (1)) и парами матриц $P(t)$ и K. Оно неоднозначно ввиду неоднозначности выбора K в (3). Для устранения последней разберем

Строение пространства $\{K\}$. Поскольку $\operatorname{Sp} K = 0$, то можно считать $K = \begin{pmatrix} -x & y - z \\ y + z & x \end{pmatrix}$, и тогда $\{K\}$ совпадает с евклидовым $\widetilde{R}^3 = \{x, y, z\}$. Конус $\widetilde{\Pi}: x^2 + y^2 = z^2$ разбивает $\widetilde{R}^3$ на области $\widetilde{H}: x^2 + y^2 > z^2$ и $\widetilde{O}: x^2 + y^2 < z^2$. Оказывается, если $K \in \widetilde{H} \cup \widetilde{\Pi}$, то (1) неустойчиво, а (3) однозначно; если $K \in \widetilde{O}$, то (1) устойчиво, а (3) счетнозначно. Однако если условиться всегда брать K лишь из полуоткрытой области $R_0^3: x^2 + y^2 - z^2 \geqslant -\pi^2/4\omega^2$ (включая верхнюю часть границы и исключая нижнюю), то (3), а за ним и (2) становятся однозначными.

Строение пространства $\{P(t)\}$. Если во внутренности обычного тора взять диаметрально противоположные точки a и b, то $\{P(t)\}$ гомеоморфно множеству Ω непрерывных путей, ведущих из a в a или b. Метрика вводится естественно. Ω распадается на счетное число связных подмножеств Ω_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), где n совпадает с числом полуоборотов пути вокруг центра тора.

Так как теперь соответствие $A(t) \sim (P(t), K)$ однозначно и, как можно проверить, взаимно непрерывно, то имеем гомеоморфизм $L^3 = \Omega \times \widetilde{R}_0^3$. Здесь $L^3 = \{A(t)\}$ — множество матриц $A(t)$ или систем (1). При этом (1) устойчиво, если $K \in \widetilde{O}_0 = \widetilde{O} \cap \widetilde{R}_0^3$, и неустойчиво, если $K \in \widetilde{H}$; случай $K \in \widetilde{\Pi}$ является пограничным (и неустойчивым, если $K \neq 0$). Так как $\Omega = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_n$, то L^3 распадается на счетное число областей устойчивости: $\widetilde{O}_n = \Omega_n \times \widetilde{O}_0$ и неустойчивости: $H_n = \Omega_n \times \widetilde{H}$. Более тщательно построенная и весьма наглядная модель пространства L^3 составляет один из важных результатов работы.

Далее выясняется, как связано поведение решений (1) с принадлежностью $A(t)$ к той или иной области в L^3.

Теорема 4. Пусть φ_x — угол поворота вектора — решения $x(t)$ за время ω. Тогда $A(t) \in O_n$, если $n\pi < \varphi_x < (n+1)\pi$ для всех решений $x(t)$; $A(t) \in H_n$, если найдутся два решения x_1 и x_2 с углами $\varphi_{x_1} = \varphi_{x_2} = n\pi$, а для всех остальных решений $0 < |\varphi_x - n\pi| < \pi$; случаи же $n\pi \leqslant \varphi_x < (n+1)\pi$, или $n\pi < \varphi_x \leqslant (n+1)\pi$, или $\varphi_x \equiv n\pi$ являются пограничными.

Оценивая углы поворота решений, можно найти ряд критериев устойчивости и неустойчивости. Например, из (1) удается вычислить

$$\varphi_x = \int_0^{\omega} [(Hx, x)/(x, x)]\, dt,$$

поэтому, если $h_{\min}(t)$ и $h_{\max}(t)$ — собственные числа матрицы $H(t)$, получаем следующий

Критерий устойчивости. Если для некоторого $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеем

$$n\pi \int_0^{\omega} h_{\min}\, dt \leqslant \int_0^{\omega} h_{\max}\, dt < (n+1)\pi,$$

то (1) устойчиво и $A(t) \in O_n$.

Приводятся значительные усиления этого критерия и ряд других, обобщающих критерии Ляпунова и Жуковского для уравнения $y'' + p(t)y = 0$. Обобщена также теорема сравнения для этого уравнения на случай (1). В заключение доказана «осцилляционная теорема», когда $H(t)$ зависит от параметра λ, и при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$ проходит последовательно счетное число областей устойчивости и неустойчивости.

Р. Э. Виноград

6577 Д. Динамические системы на плоскости с малым параметром при одной из производных. Г у -

барь Е. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Белорусс. ун-т, Минск, 1955

6578 Д. **Об асимптотическом поведении решений системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка в окрестности иррегулярно-особой точки. Костомаров Д. П.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

6579 Д. **Системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичные линейным. Гробман Д. М.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1956

6580 Д. **Об асимптотическом представлении интегралов обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами. Кужий А. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Киевск. гос. пед. ин-т, Киев, 1956

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

6581. **Заметка о втором коллоквиуме по уравнениям в частных производных. Годо** (Note sur le second colloque sur les équations aux dérivées partielles. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 7, 697 (франц.)

6582. **О теореме экстремальных значений. Вылкович** (Asupra teoremei valorilor extreme (tve). Vîlcovici V.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, **7**, № 3, 741—749 (рум.; рез. русс., франц.)

В $n+1$-мерном пространстве S_{n+1} точек $(t, x_1 \ldots x_n)$ рассматривается n-мерное многообразие V_n, которое вместе с плоскостями $t=t_0$ и $t=t_0+T$, где $T>0$, ограничивает замкнутое односвязное ограниченное множество $D \subset S_{n+1}$. D' — множество, состоящее из точек, внутренних по отношению к D, и из точек, для которых $t=t_0+T$; множество $C=D-D'$ называется границей D.

Если функция u непрерывна в D, на границе C удовлетворяет неравенству $m \leqslant u \leqslant M$, обладает в D' производными $\dot{u}=\partial u/\partial t$, $u_i'=\partial u/\partial x_i$, $u_i''=\partial^2 u/\partial x_i^2$ и удовлетворяет в D' уравнению

$$\Delta u = \varphi(t, x_i, u, u_i', \dot{u}) \qquad (1)$$

или уравнению

$$\dot{u} = \psi(t, x_i u, u_i', \Delta u), \qquad (2)$$

то для нее справедлива следующая теорема экстремальных значений:

Функция u в D удовлетворяет неравенству $m \leqslant u \leqslant M$, если для φ выполнены условия:

$\varphi(t, x_1, \ldots, x_n, y, 0, \ldots, 0, s) > 0$ для $s>0$ и $y>M$,

$\varphi(t, x_1, \ldots, x_n, y, 0, \ldots, 0, s) < 0$ для $s<0$ и $y<m$

в случае, когда u есть решение уравнения (1), или если для ψ выполнены условия

$\psi(t, x_1, \ldots, x_n, y, 0, \ldots, 0, s) \leqslant 0$ для $s \leqslant 0$ и $y>M$,

$\psi(t, x_1, \ldots, x_n, y, 0, \ldots, 0, s) \geqslant 0$ для $s \geqslant 0$ и $y<m$

в случае, когда u есть решение уравнения (2).

При помощи этой теоремы доказывается теорема единственности решения первой краевой задачи для уравнения

$$\dot{u} = a\Delta u + \sum_{i=1}^n b_i u_i' + cu + g,$$

$(a=a(t, x_1, \ldots, x_n)$, $b_i=b_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $c=c(t, x_1, \ldots, x_n)$, $g=g(t, x_1, \ldots, x_n))$ при условии, что в D' выполнены неравенства $a \geqslant 0$, $c \leqslant 0$, и для уравнения

$$\Delta u = a\dot{u} + \sum_{i=1}^n b_i u_i' + cu + g$$

при условии, что $a \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ в D', причем ни в одной точке D' не должно быть знака равенства в обоих соотношениях.

Указывается случай, когда теорема экстремальных значений выполняется для уравнения

$$\dot{u}'' = A(x, t, u)\dot{u} + B(x, t, u)u' + F(x, t, u).$$

Т. Д. Вентцель

6583. **Верхние и нижние границы для квадратичных функционалов. Диаз** (Upper an lower bounds for quadratic functionals. Diaz J. B.), Proc. Sympos. Spectral Theory and Different. Probl., Stillwater, Oklahoma, 1955, 279—289 (англ.)

Для вектора v, принадлежащего вещественному гильбертову пространству, устанавливаются два неравенства: 1) Если $w_1, \ldots, w_p$ — ортонормированные векторы, то $\sum_{i=1}^p (v, w_i)^2 \leqslant (v, v)$. 2) Пусть $z_1, \ldots, z_q$ — ортонормированные векторы, ортогональные к v, а вектор z таков, что $(z-v, v)=0$. Тогда $(v, v) \leqslant (z, z) - \sum_{i=1}^q (z, z_i)^2$. Эти неравенства позволяют оценить сверху и снизу минимальное значение квадратичного функционала.

Примечание референта. Приведенные неравенства известны. В задаче о минимуме квадратичного функционала первое из них соответствует методу Ритца, второе — методу ортогональных проекций.

С. Г. Михлин

6584. **Класс гюйгенсовых дифференциальных уравнений и их интегрирование. Штельмахер** (Eine Klasse huyghenscher Differentialgleichungen und ihre Integration. Stellmacher Karl L.), Math. Ann., 1955, **130**, № 3, 219—233 (нем.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$u_{tt} + \lambda_0 t^{-2} u - \sum_{i=1}^m (u_{x_i x_i} + \lambda_i x_i^{-2} u) = 0. \qquad (1)$$

В том случае, когда $m+1$ — четно и $-\lambda_i = \nu_i(\nu_i+1)$, где $\nu_i = 0, 1, 2 \ldots$, при помощи теоремы о среднем Асгейрсона строится решение задачи Коши для уравнения (1) (начальные данные задаются при $t=\theta \neq 0$).

При помощи построения элементарного решения доказывается, что если $\sum_0^m \nu_i \leqslant (m-3)/2$ (и только в этом случае), для уравнения (1) отсутствует диффузия волн.

Из доказанной леммы следует, что уравнение (1) не приводится элементарными преобразованиями к волновому уравнению, если хотя бы одно $\lambda_i \neq 0$. Таким образом известное предположение Адамара о том, что все гюйгенсовы уравнения приводятся элементарными преобразованиями к волновому уравнению, неверно для $m=5, 7 \ldots$

В. М. Бабич

6585. **О решениях уравнения минимальных поверхностей. Хейнц** (Sur les solutions de l'équation de surface minimum. Heinz Erhard), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 52, Strasbourg, 1953, Paris, 1953, 61—65 (франц.)

Доказывается теорема: Пусть $z=z(x, y)$ — минимальная поверхность над кругом $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2$. Для гауссовой кривизны K_0 поверхности в точке $(x_0 y_0$ имеет место оценка $|K_0| \leqslant 3\pi^2 R^{-2}$. Отсюда следует что если минимальная поверхность $z=z(x, y)$ проекти-

руется на всю плоскость xy, то эта поверхность — плоскость (теорема С. Н. Бернштейна).

Приведенная теорема получается из более общего предложения: Пусть $\varphi(x, y)$ — решение уравнения

$$a\varphi_{xx} + 2b\varphi_{xy} + c\varphi_{yy} = 0,$$

где $ac - b^2 = 1$, $a_x + b_y = b_x + c_y = 0$ в круге $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < R^2$. Тогда

$$(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)_{(x_0, y_0)} \leqslant MR^{-2} \sup \varphi(x, y)^2,$$

где sup берется в круге $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < R^2$, а $M = 12^{-1}\{1 - [1 - 4(a(x_0, y_0) + c(x_0, y_0))^{-2}]^{1/2}\}^{-1}$.

А. В. Погорелов

6586. **Зависимость решений гиперболических уравнений от коэффициентов и данных на характеристиках. Кордуняну** (Dependența soluțiilor ecuațiilor hiperbolice de coeficienți și de datele pe caracteristice. Corduneanu C.), Bul. științ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. și fiz., 1955, **7**, № 2, 313—317 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматривается задача Гурса для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными. Показывается на примере, что зависимость решения уравнения от данных на характеристиках не будет непрерывной в смысле метрики пространства C. Доказан ряд предложений, примыкающих к сформулированному результату. В. М. Бабич

6587. **О периодических решениях задачи с начальными значениями для нелинейного волнового уравнения типа Даффинга. Флейшман** (On the periodic solutions to an initial-value problem for a Duffingtype nonlinear wave equation. Fleishman Bernard A.), Appl. Phys. Lab., Johns Hopkins, Univ., Silver Spring, Md., Bumblebee Rept, 1954, № 209, v. + 24 pp. (англ.)

Доказывается существование периодического по времени решения нелинейного неоднородного гиперболического уравнения

$$u_{xx} = u_{tt} + ku_t + \alpha u + \varepsilon u^3 + B,$$

функции u и B предполагаются периодическими по t и x. Параметры k, α, ε и периоды по x и t удовлетворяют некоторым условиям, которые, грубо говоря, сводятся к тому, что коэффициент затухания k должен быть достаточно велик. Эти условия обеспечивают то, что данные Коши (u, u_t) при переходе с плоскости $t = 0$ на плоскость $t = p$ уменьшаются в норме (C_2, C_1). Оценки, которые нужны для доказательства такого сжатия, являются оценками типа Хаара. P. D. Lax

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 484.

6588. **Об одном случае интегрируемости в квадратурах уравнения Лёвнера-Куфарева. Базилевич И. Е.**, Матем. сб., 1955, **37**, № 3, 471—476

Видоизмененное автором посредством замены $\tau = e^{-t}$, $\xi = fe^{ia\ln\tau}$, обобщенное уравнение Лёвнера

$$(1 + a^2)\, d\tau/\tau = (p(\xi, \tau) - ai)\, d\xi/\xi \qquad (1)$$

(где функция $p(\xi, \tau)$ регулярна в $|\xi| < 1$ при $0 < \tau \leqslant 1$, $\operatorname{Re} p(\xi, \tau) > 0$, $p(0, \tau) = 1$ и a — вещественное число) обладает тем свойством, что решение его $\xi(z, \tau)$ $(\xi(z, 1) = z,\ 0 < \tau \leqslant 1)$ однолистно и регулярно в $|z| < 1$. Изучая случай $p(\xi, \tau) = p_0(\xi)(1 - \tau^m) + p_1(\xi)\tau^m$, когда (1) интегрируемо, и находя его решение, автор приходит к определению при помощи интегрального представления некоторого подкласса однолистных в $|z| < 1$ функций $w(z)$ $(w(0) = 0,\ w'(0) = 1)$. В частности, в этот подкласс входит более общий, чем класс функций звездообразных относительно $w = 0$, класс функций вида $w(z) = \int_0^z t^{-1} f^*(t)\, p(t)\, dt$, где $\operatorname{Re} p(z) > 0$ в $|z| < 1$ и $f^*(z)$ звездообразна. Для последнего класса функций установлены оценки: $|w^{(n)}(0)/n!| \leqslant n$.

П. П. Куфарев

6589. **Простое доказательство теоремы о среднем значении для гармонических функций. Демидович** (O demonstratie simplă a teoremei de medie pentru functiile armonice. Demidovici B. P.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1955, Ser. 3a, **9**, № 2, 58—59 (рум.)

Перевод с русского (РЖМат, 1956, 5252).

6590. **О линиях и двумерных поверхностях, вдоль которых решение волнового уравнения может иметь разрыв. Петровский И. Г., Чудов Л. А.** (論波動方程解的間斷綫及二維間斷面.朱多夫 Л. А.,彼得洛夫斯基И. Г.), 數學進展(Шусюэ цзиньчжань), 1955, **1**, № 1, 217—222 (кит.)

Перевод с русского (РЖМат, 1956, 1363).

6591. **Новое доказательство теоремы Келлога-Эванса о множестве иррегулярных точек задачи Дирихле. Брело** (A new proof of the fundamental theorem of Kellogg-Evans on the set of irregular points in the Dirichlet problem. Brelot M.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1955, **4**, № 1, 112—122 (англ.)

Приводится доказательство известной теоремы о нулевой емкости любого компактного множества иррегулярных точек и тесно с ней связанной теоремы единственности. Характерной особенностью доказательства является то, что автор избежал использования фактов современной теории потенциала. Вместо этого используется функция Грина, которую автор изучает, построив методом Перрона обобщенное решение задачи Дирихле (Brelot M., Acta Szeged, 1939, **9**, 133—153).

Н. С. Ландкоф

6592. **Асимптотика роста решений уравнения $(\nabla^2 + k^2)u = 0$. Фридлендер, Келлер** (Asymptotic expansions of solutions of $(\nabla^2 + k^2)\, u = 0$. Friedlander F. G., Keller Joseph B.), Div. Electromagn. Res., Inst. Math. Sci., New York Univ., Res. Rept., 1954, № EM—67, i+10 pp. (англ.)

Во многих задачах диффракции надо знать асимптотическое поведение при $k \to \infty$ решения уравнения

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \qquad (1)$$

Трудностей не встречается, если известно точное решение задачи, но если оно неизвестно, желательно иметь прямые методы.

Методы, предложенные Р. К. Ланбергом (R. K. Luneberg), не дают всех возможных асимптотических решений в задачах электромагнитной диффракции; так, они не дают дробных степеней k или экспоненциально убывающих множителей. Автор рассматривает решения (1), имеющие вид $u = v\exp(ik\varphi - k^\alpha\psi)$, где $v \sim \sim \sum_0^\infty v_n(x, y, z)\, k^{-\lambda_n}$, здесь φ, ψ, v_n, действительные числа α и λ_n определяются так, чтобы $\lambda_{n+1} > \lambda_n$; φ может быть произвольным решением уравнения $(\operatorname{grad}\varphi)^2 = 1$. $\psi = \text{const}$ — развертывающиеся поверхности, образованные лучами прямых, ортогональных к поверхности $\varphi = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, α заключено в пределах $0 < \alpha \leqslant 1/2$. Если $\alpha = 1/2$, то $\lambda_n = n/2$. Если же $0 < \alpha < 1/2$, λ_n является $(n+1)$-м членом возрастающей последовательности чисел, которые выражаются формулой $m_1(1 - 2\alpha) + m_2(1 - \alpha) + m_3$, где m_1, m_2, m_3 — любые неотрицательные целые числа. E. T. Copson

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 482.

6593. **О резольвенте одного эллиптического оператора. Шатунов М. П.**, Матем. сб., 1955, **37**, № 3, 459—470

Изучается дифференциальный оператор

$$Lu \equiv \frac{1}{r^2(x)+\rho^2(y)}\left[\frac{1}{p(x)}\frac{\partial}{\partial x}p(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{q(y)}\frac{\partial}{\partial y}q(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right] \quad (1)$$

в некотором прямоугольнике $\Omega\,(a<x<b,\ c<y<d)$, конечном или бесконечном с границей S. На S рассматривается граничный оператор

$$\Gamma(u) \equiv (\partial u/\partial n + hu)|_S \text{ или } \Gamma(u) \equiv u|_S. \quad (2)$$

Если скалярное произведение определить по формуле

$$(u, v) = \iint_\Omega p(x)\,q(y)\,[r^2(x)+\rho^2(y)]\,u(x, y)\,\bar{v}(x, y)\,dx\,dy,$$

то (1) и (2) определяют в Ω некоторый линейный симметрический оператор. Уравнение $Lu + ku = 0$, где k — комплексный параметр, допускает разделение переменных, в результате чего мы получаем два одномерных дифференциальных оператора

$$l^x = \frac{1}{p(x)}\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + kr^2(x),$$

$$l^y = \frac{1}{q(y)}\frac{d}{dy}q(y)\frac{d}{dy} + k\rho^2(y).$$

Выводятся формулы для представления резольвенты R_λ оператора L через резольвенты R^x_λ и R^y_λ операторов l^x и l^y. В частности, доказывается теорема: Пусть $F(x, y) \in D(l^x)$ при любом $y \in (c, d)$, $F(x, y) \in D(l^y)$ при любом $x \in (a, b)$, $\sigma f \in L^2(\Omega)$, где $\sigma = \{r^2(x) + \rho^2(y)\}^{1/2}$. Тогда

$$u(x, y; k) = -(2\pi i)^{-1}\int_C R^x_\lambda R^y_{-\lambda} F d\lambda$$

есть решение уравнения $Lu + ku = f(x, y)$. Здесь $F = [r^2(x) + \rho^2(y)]\,f(x, y)$, C — прямая, разделяющая полуплоскость λ-плоскости, описываемую неравенствами $0 < \gamma \leqslant \theta \leqslant \pi + \gamma$ ($\lambda = |\lambda|\,e^{i\theta}$), от дополнительной полуплоскости, пробегаемая слева направо. Б. М. Левитан

6594. **Уточнение одного доказательства в моей статье об эллиптических уравнениях с частными производными. Пини** (Precisazioni a un ragionamento contenuto in una mia nota sulle equazioni a derivate parziali di tipo ellitico. Pini Bruno), Ricerche mat., 1954, 3, № 1, 3—12 (итал.)

Уточнение относится к статье в Rend. mat. e delle sue appl., 1952, 5, №11. Приводится точное доказательство предложения: Пусть D — область s-мерного евклидова пространства,

$$\mathfrak{L} \equiv \sum_{0 \leqslant n_1 + \ldots + n_s \leqslant 2n} a_{n_1 \ldots n_s}(P)\,D_{n_1 \ldots n_s}$$

— эллиптический оператор порядка $2n$ с коэффициентами, $2n$ раз непрерывно дифференцируемыми в D; если $f(P)$ суммируема в D и удовлетворяет соотношению $\int_D f\mathfrak{L}[u]\,dP = 0$ при любой $u(P)$ $2n$ раз непрерывно дифференцируемой в D, то f совпадает почти всюду с регулярным решением уравнения $\mathfrak{M}[f] = 0$, где $\mathfrak{M}$ — оператор, сопряженный с $\mathfrak{L}$.

Доказательство приводится для случая $s = 2$ при помощи построений, использующих свойства фундаментального решения. Указывается, что соответствующий результат верен и для систем. А. А. Дезин

6595. **О формуле Парсеваля в теории разложений по собственным функциям, возникающим из дифференциальных уравнений. Мартин, Титчмарш** (On the Parseval formula in the theory of eigenfunction expansions arising from differential equations. Martin A. I., Titchmarsh E. C.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 23, 197—206 (англ.)

Изучается уравнение

$$\Delta u + \{\lambda - q(x)\}\,u = 0 \quad (1)$$

во всем n-мерном евклидовом пространстве R_n, x — точка R_n. Пусть $G(x, \xi; \lambda)$ — функция Грина уравнения (1) и

$$H(x, \xi; \mu) = \lim_{\delta \to 0}\int_0^\mu \operatorname{Im} G(x, \xi; u + i\delta)\,du.$$

Пусть $f,\ g \in L^2(R_n)$,

$$I(f, g; \mu) = (\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x, \xi; \mu)\,f(x)\,g(\xi)\,dx d\xi.$$

Доказывается формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} fg\,dx = \lim_{\mu \to \infty}[I(f, g; \mu) - I(f, g; -\mu)]. \quad (2)$$

В конце работы указываются условия, при выполнении которых справедлива формула

$$D(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} + qfg\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda d_\lambda I(f, g; \lambda), \quad (3)$$

а также неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d_\lambda I(f, f; \lambda) \leqslant D(f, f).$$

Примечание референта. Если спектральное разложение для уравнения (1) выводить из общей спектральной теоремы для линейных операторов в пространстве Гильберта, что сделано, например, в работе А. Я. Повзнера (РЖМат, 1954, 263), то формулы (2) и (3) совпадают с формулами $E_\infty = E$, $(Af, g) = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda d_\lambda (E_\lambda f, g)$, где E_λ — разложение единицы оператора A, E — единичный оператор. Б. М. Левитан

6596. **Разложение функций, обладающих особенностью, в ряд по собственным функциям. Ядра дробного порядка. Ильин В. А.**, Докл. АН СССР, 1955, 105, № 1, 18—21

Пусть функция $v(x, y)$ обладает в точке P особенностью вида r^ε_{PQ} ($3/2 > \varepsilon > -2$; при $\varepsilon > 0$ особенность в производных) и всюду, кроме этой точки, удовлетворяет общим условиям разложимости в ряд по собственным функциям уравнения $\Delta u - \lambda u = 0$ при однородных краевых условиях любого из 3 родов. Тогда v разлагается в абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям внутри произвольной области G. Доказательство проводится непосредственным вычислением коэффициентов разложения для функции — особенности.

Далее доказывается существование функции $K_\alpha(P, Q)$ ($\alpha > 0$ — любое число), имеющей своим рядом Фурье $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-\alpha} u_i(P) u_i(Q)$. $K_\alpha(P, Q)$ названа ядром порядка α. Указывается, что результаты обобщаются на случай произвольного числа измерений. А. А. Дезин

6597. Достаточные условия разложимости в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям. Ильин В. А., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 2, 210—213

Используя понятие истокообразной представимости при помощи ядра дробного порядка (реф. 6596), автор уточняет теорему Гильберта-Шмидта для ядер, связанных с уравнением $\Delta u - \lambda u = 0$, и ослабляет условия разложимости в абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям этого уравнения. В двумерном случае допустимая особенность в ядре истокообразного представления имеет вид $r^{-1+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$). Указывается обобщение на случай любого числа измерений. А. А. Дезин

6598. Проблемы точечных решеток и проблемы собственных значений. Минакшисундарам (Lattice point problems and eigenvalue problems. Minakshisundaram S.), Proc. Sympos. Spectral Theory and Different. Probl., Stillwater, Oklahoma, 1955, 325—332 (англ.)

Имеется аналогия между некоторыми задачами аналитической теории чисел об оценке количества точек решетки в данной области и некоторыми задачами математической физики о собственных значениях и собственных функциях. Эта аналогия, в частности, позволяет доказать следующие утверждения: Пусть в евклидовом пространстве k измерений задана регулярная ограниченная область D объема V с границей B. Пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ — положительные собственные значения, а $\omega_1(x) = \omega_1(x_1, \ldots, x_k)$, $\omega_2(x), \ldots$ — соответствующие ортогональные нормированные собственные функции для одной из граничных задач:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \ (\text{в } D), \ u|_B = 0,$$

$$\Delta u + \lambda u = 0 \ (\text{в } D), \ (\partial u / \partial n)|_B = 0.$$

Тогда

$$1) \ \sum_{\lambda_n \leqslant T} \omega_n^2(x) \sim (2\sqrt{\pi})^{-\kappa} \Gamma^{-1}(k/2+1) T^{k/2}$$

при $T \to \infty$,

$$2) \ \sum_{\lambda_n \leqslant T} 1 \sim (2\sqrt{\pi})^{-\kappa} \Gamma^{-1}(\kappa/2+1) V T^{\kappa/2}$$

при $T \to \infty$.

А. В. Малышев

Примечание редактора. Первое утверждение является частным случаем результата, установленного Б. М. Левитаном (РЖМат, 1956, 440) второе утверждение также не является новым (Курант, Гильберт, Методы математической функции, 1951, т. I).

Кроме того, в статье содержатся неверные утверждения, согласно которым функция $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(x) \omega_n(y) \lambda_n^{-s}$ при $x \neq y$ является целой, а при $x = y$ мероморфной функцией s, имеющей простые нули при $s = -1, -2, \ldots$. Автор пытался установить эти положения, производя почленное интегрирование неравномерно сходящегося ряда.

6599. Теория потенциала для параболических уравнений. Слободецкий Л. Н., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 1, 19—22

Рассматривается уравнение

$$u_t' - Mu \equiv u_t' - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u''_{x_i x_j} - \sum_{j=1}^{n} b_j u'_{x_j} - cu = f, \quad (1)$$

где a_{ij}, b_j, c, f — комплексные функции t и $x = (x_1, \ldots, x_n)$, форма $\mathrm{Re} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \alpha_i \alpha_j$ положительно определенная. Построено основное сингулярное решение уравнения $u_t' - Mu = 0$ в слое $0 \leqslant t \leqslant T$ при условии, что c, b_j, $\partial b_j / \partial x_k$, a_{ij}, $\partial a_{ij} / \partial x_k$, $\partial^2 a_{ij} / \partial x_k \partial x_l$ удовлетворяют по x условию Гельдера равномерно по t. При более жестких ограничениях сингулярное решение было построено Дрезделем (Dressel F., Duke Math J., 1940, **7**, 186—203; 1946, **13**, 61—70).

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве x с гладкой границей Г. В предположении, что a_{ij} удовлетворяют условию Гельдера по t равномерно по x, строятся параболические потенциалы простого и двойного слоя и выводятся формулы для их предельных значений на Г. Отмечается, что при помощи потенциалов внешние и внутренние краевые задачи для уравнения (1) сводятся к интегральным уравнениям типа Вольтерра. (В случае не зависящих от t коэффициентов аналогичные результаты получил П. К. Зерагия (РЖМат, 1956, 2245).) Изучаются функции Грина первой и второй краевых задач (внутренних) для уравнения (1). При помощи них в случае не зависящих от t коэффициентов получена оценка роста собственных функций оператора M в $\Omega + \Gamma$. Аналогичные оценки, но во внутренней подобласти получены для производных первого и второго порядка от собственных функций. Эти результаты обобщают и уточняют результаты Х. Л. Смолицкого (см. Гюнтер Н. М., РЖМат, 1956, 446 К) и О. А. Ладыженской (Докл. АН СССР, 1950, **74**, № 3). Доказательства отсутствуют. Имеются опечатки. М. Ш. Бирман

6600. Распространение на параболический случай теоремы Рисса о субгармонических функциях. Пини (Estensione al caso parabolico di un teorema di F. Riesz relativo alle funzioni subarmoniche. Pini Bruno), Riv. mat. Univ. Parma, 1954, 5, № 4—5, 268—280 (итал.)

Если $u(x, y)$ субгармонична в области A и $D \subset A$, то в D существует такое распределение массы $\omega(e)$, что

$$u(P) = -\int_D \lg(1 / \overline{PQ}) \, d\omega(e_Q) + H(P),$$

где $P \in D$ и $H(P)$ гармонична в D. Аналогичное разложение устанавливается для функций, являющихся аналогом субгармонических по отношению к оператору $\partial^2 / \partial x^2 + \partial / \partial y$. При построении необходимых для доказательства мажорант и минорант используется фундаментальное решение уравнения теплопроводности. А. А. Дезин

6601. Оптимальные задачи при распространении тепла в полуограниченном теле. Ловерьер (Optimum problems in the conduction of heat in a semi-infinite solid. Lauwerier H. A.), Appl. Scient. Res. A. 1953, 4, 142—152 (англ.)

В начальный момент тело, заполняющее область $x \geqslant 0$, имеет нулевую температуру. На поверхности $x = 0$ в интервале времени $0 < t < t_0$ поддерживается температура $T_0 > 0$, затем эта поверхность изолируется. Соответствующие величины T_0 и t_0 подобраны так, что температура на заданной глубине x достигает заданной величины T_m ($T_m < T_0$) с минимальной затратой тепловой энергии, приходящейся на единицу площади поверхности $x = 0$. Соответствующая задача изучается и в случае, когда условие постоянства температуры

при $0 < t < t_0$ заменяется условием постоянства потока тепла через поверхность $x = 0$. Автор указывает, что минимум энергии для всем возможным положительным t_0, T_0), необходимой для того, чтобы температура на глубине x поднялась до T_m, достигается, когда температура или поток тепла при $x = 0$ является импульсом (тепловой взрыв). Графические результаты получаются при помощи применения некоторых вычислительных методов к известным температурным формулам.

Примечание референта. Автор неадекватным образом описывает и обосновывает процесс получения оптимальных значений. R. V. Churchill

Bull. Am. Math. Soc., 1954, 15, № 6, 533.

6602 К. **Лекции об уравнениях с частными производными. Петровский** (Előadások a parciális differenciálegyenletekről. Petrovszkij I. G., Összeállította ford. Budapest, Akad. Kiadó, 1955, 309 l.), Magyar Mathem. Könyvtár., 1955, № 5, 152 (венг.)

6603 К. **Различные дополнения к теории преобразования Лапласа и уравнений в частных производных. Жане** (Compléments divers sur la transformation de Laplace et les équations aux derivées partielles. Janet Maurice. Paris, Secretariat Math., 1955, 48 p.) (франц.)

Курс лекций по применению преобразования Лапласа к некоторым вопросам математической физики. В гл. 1 рассматривается краевая задача для уравнения $u_t - u_{xx} = 0$. Гл. 2 посвящена формуле Парсеваля. В гл. 3 рассматриваются целые функции экспоненциального вида и их преобразования Лапласа. В гл. 4 излагается задача Коши для волнового уравнения. Изучаются волны сферические, цилиндрические и плоские. Дается приложение к телеграфному уравнению. Книга не содержит новых результатов, но представляет интерес как последовательное применение преобразования Лапласа к ряду задач математической физики.

Примечание референта. Повидимому, автору не были известны работы, в которых решение телеграфного уравнения выражено через цилиндрические функции двух переменных (Кузнецов П. И., Электричество, 1953, № 5, 35—40).

П. И. Кузнецов

6604 К. **Уравнения математической физики. Моисил** (Ecuaţii fizice matematice. Moisil Gr. C. Univ. «C. I. Parhon», Bucureşti, 1955, 384 p., il. — Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, A5, № 1, 12 (рум.)

6605 К. **Математическая теория плоской задачи теории упругости. Бабушка, Ректорыс, Вычихло** (Matematická theorie rovinné pružnosti. Babuška Ivo, Rektorys Karel, Vyčichlo František. Praha, CSAV, 1955, 526, (3) str., il. 93 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 22, 555 (чеш.)

6606 К. **Уравнения математической физики. Тихонов, Самарский** (Rovnice matematické fysiky. Tichonow A. N., Samarskij A. A. Z. ruš. Praha, ČSAV, 1955, 765, (1) str., il., 98 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 14, 348 (чеш.)

Перевод с русского (РЖМат, 1955, 3218).

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

6607. **О структурной устойчивости одноконтурной системы автоматического регулирования, содержащей воздействия по производным. Гантмахер Ф. Р.,** Тр. 2-го Всес. совещ. по теории автомат. регулирования, Т. 1. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1955, 315—323

Изложение уже опубликованной работы автора и М. А. Айзермана (РЖМат, 1954, 474).

6608. **Применение векторных элементов к решению проблемы двух тел с переменной суммой масс. Михайлович** (Примена векторских елемената на решење проблема двају тела са променљивим збиром маса. Михайловић Добривоје), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1953, 5, № 3—4, 93—109 (серб.; рез. англ.)

Исследуя задачу двух тел с переменной суммой масс, автор применяет метод Батырева (Батырев А. А., Астрон. ж., 1949, 26, № 1, 56—59), позволяющий преобразовать дифференциальные уравнения задачи двух тел с суммой масс, изменяющейся по закону

$$M = 1 / (1 + \alpha t) \quad (\alpha > 0),$$

к обычным уравнениям классической задачи двух тел. Вместо обычных астрономических постоянных употребляется система векторных элементов: L — постоянная интеграла площадей, D — постоянная интеграла Гамильтона $LD = 0$, T — время прохождения через перигелий.

Исследуются случаи эллиптического, гиперболического и параболического движений. Библ. 6 назв.

А. В. Фокин

6609. **Устойчивость колебаний горизонта в уравнительном резервуаре с сопротивлением. Аронович Г. В.** В сб.: Памяти Александра Александровича Андронова, М., Изд-во АН СССР, 1955, 93—108

Изучаются режимы работы системы, содержащей уравнительный резервуар с сопротивлением при постоянной мощности турбины. Заменой переменных уравнения, описывающие процесс, приводятся к системе

$$\frac{dx}{dt_1} = u,$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{(1-\beta)\beta u - \varepsilon \{(x \pm \alpha u^2)(1 + \beta x \pm \beta \alpha u^2) \pm}{(1 + \beta x \pm \beta \alpha u^2)^2 \mp 2\beta\alpha(1-\beta)u}$$

$$\frac{\pm [u(1 + \beta x \pm \beta \alpha u^2) + 1 - \beta]^3\}}{(1 + \beta x \pm \beta \alpha u^2)^2 \mp 2\beta\alpha(1-\beta)u}, \qquad (1)$$

где знаки определяются направлением течения воды в штольне и направлением движения горизонта воды в уравнительной башне, постоянные β, α, ξ — параметры системы в некотором стационарном режиме. Рассматривается случай, когда знаменатель во втором уравнении (1) положителен. Исследуется влияние параметра ξ на поведение траекторий (1) в окрестности особой точки O_1 ($x_1 = -1$, $u = 0$). Например: при определенных условиях при переходе (возраста) ξ через корень уравнения $\beta/2(1-\beta) - \varepsilon = 0$ эта точка превращается из неустойчивой в устойчивую, причем из O_1 появляется неустойчивый цикл, и т. д. Определяются некоторые возможные структуры разбиения фазовой плоскости на траектории в большом в зависимости от параметров системы. Доказательство некоторых утверждений изложено конспективно.

Н. Н. Красовский

6610. **Метод аналитических функций в гидродинамике вязких жидкостей. Моисил** (Metoda funcţiilor analitice in hidrodinamica lichidelor viscoase. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. RPR, 1955, 5, № 10, 1411—1419 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассмотрена задача о плоском течении несжимаемой вязкой жидкости. Движение медленное. Массовые силы отсутствуют. Уравнения установившегося движения и неразрывности имеют вид:

$\mu \Delta u - \partial p/\partial x = 0$, $\mu \Delta v - \partial p/\partial y = 0$, $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$,

где p — давление, μ — коэффициент вязкости, u, v —

проекции вектора скорости на оси координат x, y. Для решения этой системы уравнений используется теория функций комплексного переменного, по образцу плоской задачи теории упругости.

Доказано, что p есть гармоническая функция. Введена функция $F=\int_0^z f(z)\,dz$, где $p=\operatorname{Re} f(z)$. Составляющие скорости выражаются через две функции F и K: $u-iv=z\overline{F'}+K'$. Составляющие тензора напряжений также выражаются через F и K:

$$\sigma_x+i\tau=F'+\overline{F'}-z\overline{F''}-\overline{K''},$$

$$\sigma_y-i\tau=F'+\overline{F'}+z\overline{F''}+\overline{K''}.$$

Методом, аналогичным методу Мусхелишвили, задача сводится к отысканию двух голоморфных функций F и K, при условии, что на стенках задана комбинация $z\overline{F'}+K'$, а на свободных поверхностях $F+z\overline{F'}+\overline{K'}$. М. И. Гуревич

6611. Заметка об установившемся течении жидкости вокруг тонкого крыла. Джонс (Note on the steady flow of a fluid past a thin aerofoil. Jones D. S.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 21, 4—8 (англ.)

Рассматривается двумерное установившееся течение несжимаемой жидкости вокруг тонкого крыла, составляющего небольшой угол с направлением главного течения. При математическом рассмотрении задачи крыло заменяется прямой, занимающей промежуточное положение (хордой), на которой ставится видоизмененное краевое условие. Если $y=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$, есть уравнение хорды, то для потенциальной функции φ ставится следующее краевое условие:

$$\partial\varphi/\partial y=A_n x^{n-1}\ (n\geqslant 1),\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ y=0. \qquad (1)$$

Кроме того, должны выполняться условия: 1) $\partial\varphi/\partial y$ непрерывно при $y=0$; 2) $\partial\varphi/\partial x$ непрерывно при $y=0$, $x>1$; 3) $\varphi=O(1)$, $|\operatorname{grad}\varphi|=O(r^{-2})$, $r\to\infty$; 4) $\partial\varphi/\partial x=O(1)$, $\partial\varphi/\partial y=O(1)$ при $x=1$, $y=0$ (условие Жуковского—Кутта); 5) $\varphi=O(1)$, $r\to 0$ (условие единственности).

Вводится функция Φ, полученная из потенциала φ преобразованием Меллина $\Phi(s,\theta)=\int_0^\infty \varphi(r,\theta)r^{s-1}dr$, где s — комплексное переменное $\sigma+i\tau$. Φ удовлетворяет уравнению $\partial^2\Phi(s,\theta)/\partial\theta^2+s^2\Phi(s,\theta)=0$. Решение, удовлетворяющее условию 1), имеет вид $\Phi(s,\theta)=f(s)\sin s(\theta-\pi)$.

Применяя метод аналитического продолжения, используя остальные условия и опираясь на обобщенную теорему Лиувилля, автор получает выражение для $f(s)$:

$$f(s)=-nA_nK_N(-n)\,[s^2(s+n)\,K_N(s)\cos s\pi]^{-1},$$

где $K_N(s)=\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)/\Gamma(1-s)$. Отсюда для искомой потенциальной функции $\varphi(r,0)$ получается выражение

$$\varphi(r,\theta)=-\frac{nA_nK_N(-n)}{2\pi r}\times$$

$$\times\int_{c-\infty}^{c+\infty}\frac{r^{-s}\sin s(\theta-\pi)}{s^2(s+n)\,K_N(s)\cos s\pi}\,ds,$$

где $-1/2<c<0$. Суперпозицией решений для различных n получается решение для произвольного полиномиального краевого режима (1). Н. Н. Яненко

6612. К вопросу о форсированной эксплуатации нефтяных скважин. Свирский И. В., Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1955, № 8, 150—153

Рассматривается эксплуатация скважин в микронеоднородном изотропном пласте бесконечной мощности при нелинейных законах фильтрации с учетом упругости нефти и породы. Доказывается, что и для этого общего случая справедливо утверждение о том,что при эксплуатации в чисто нефтяной зоне наибольшая суммарная добыча достигается, если сразу после пуска скважин спустить давление на забоях до критического значения настолько скоро, как это позволяют технические условия (см. РЖМат, 1955,2293). В. Л. Данилов

6613. Упрощение решений дифференциального уравнения Фурье для задач, связанных с включением круговых батарей источников и стоков. Щелкачев В. Н., Докл. АН СССР, 1955, 101, № 2, 225-228 См. РЖМех, 1956, 301.

6614. О формуле скачка для одного интеграла, встречающегося в теории упругости. Имшенецкая Е. Ф., Науч. зап. Львовск. политехн. ин-та, 1955, № 30, 115—23

Вычисляется разрыв полной нормальной производной потенциала двойного слоя изотропного упругого тела. В противоположность результатам В. Д. Купрадзе, который получил отсутствие скачка для оператора N в применении к потенциалу двойного слоя (Купрадзе В. Д., Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, М.— Л., 1950, § 34), автор получает различные предельные значения. Метод автора основан на специальном преобразовании прямого значения полной нормальной производной.

Примечание референта. Несовпадение результатов вычислений автора и В. Д. Купрадзе объясняется тем, что полная нормальная производная у автора не соответствует, а у В. Д. Купрадзе соответствует способу образования потенциала двойного слоя.

И. С. Аржаных

6615. Об одном методе решения некоторых краевых задач теории упругости. Сунчелеев Р. Я., Науч. зап. Львовск. политехн. ин-та, 1955, № 30, 3—14

Задача интегрирования уравнений статики анизотропного упругого тела специального вида решается разделением переменных в цилиндрических координатах. Полученные выводы применяются к решению первой и второй задач для полупространства. Решения получены в виде рядов Фурье по φ с коэффициентами, зависящими от r и z, причем эти коэффициенты представлены интегралами от функций Бесселя.

И. С. Аржаных

6616. О некоторых теоремах сравнения краевых задач кручения призматических стержней. Положий (Про деякі теореми порівняння крайових задач кручення призматичних стержнів. Положій Г. М.), Прикладна механіка, 1955, 1, № 4, 391—399 (укр.; рез. русс.)

Устанавливается ряд вариационных теорем, позволяющих производить сравнение напряжений, возникающих при скручивании двух призматических стержней, часть боковой поверхности которых совпадает. Обозначим через G, $\mathbf{V}$, D площадь поперечного сечения, вектор напряжений и жесткость одного стержня, а через G_1, $\mathbf{V}_1$, D_1 — те же величины для другого стержня. Автор доказывает следующие три теоремы: 1) если $G_1<G$, то при неизменном скручивающем моменте на общей части границы имеет место неравенство $D|\mathbf{V}|\geqslant D_1|\mathbf{V}_1|$; 2) если $G_1<G$, то при неизменной степени закручивания на общей части границы имеем: $|\mathbf{V}_1|\leqslant|\mathbf{V}|$; 3) при уменьшении поперечного сечения коэффициент жесткости уменьшается. Эти теоремы предназначены для оценки сверху и снизу напряжений на боковой поверхности какого-либо стержня при помощи известных решений задачи кручения для вспомогательных профилей более простого вида.

В качестве примера получена верхняя оценка напряжений для стержня с симметричным относительно обеих осей сечением, образованным дугами четырех пересекающихся окружностей. Я. С. Уфлянд

6617. **Решение задачи кручения методом последовательного приближения к контуру. Мителъман Л. М.**, Тр. Моск. орд. Ленина авиац. ин-та им. С. Орджоникидзе, 1955, 47, 1—92

Рассматривается приближенный метод решения задачи кручения призматического бруса.

В гл. 1 описаны методы Ритца — Галеркина, Треффтца и наименьших квадратов в применении к задаче кручения. В гл. 2 приближенное выражение функции напряжений $\Psi(x, y)$ ищется в виде $\Psi_n(x, y) = f_0 + \Sigma_{k=1}^{n} a_k f_k$, где f_0 — частное решение уравнения $\Delta\Psi = -2$, а f_k — функции из какой-либо полной в области поперечного сечения бруса системы гармонических функций. Коэффициенты a_k определяются по методу наименьших квадратов (Михлин С. Г., Прямые методы в математической физике, Гостехиздат, 1950, гл. 6) или из условия выполнения граничных условий в отдельных точках контура. Утверждается, что приближенное решение Ψ_n является точным решением задачи кручения для некоторой области, близкой к данной. По степени близости приближенного контура к заданному предлагается судить о достигнутой точности приближенного решения (метод последовательного приближения к контуру). Затрагивается вопрос о выборе полной системы гармонических функций. В гл. 3 автор применяет описанный метод к задаче кручения для некоторых выпуклых односвязных областей (квадрат, полукруг, равнобедренный прямоугольный треугольник, «авиационный профиль»). В качестве функций f_k во всех примерах использованы гармонические полиномы. Дается ряд практических рекомендаций. М. Ш. Бирман

6618. **Кручение призматических стержней швеллерного поперечного сечения. Гладик** (Hladik Arnošt), Чехосл. физ. ж., 1955, 5, № 4, 502—514 (рез. англ.)

Опираясь на работы Н. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна (Прикл. матем. и механика, 1949, 13, № 1, 107—112; № 5, 551—556; 1950, 14, № 3, 265—276; 1951, 15, № 1, 97—102) и применяя метод Г. А. Гринберга (Изв. АН СССР, сер. физ., 1946, 10, № 2, 141—168) интегрирования уравнений с частными производными, автор сводит задачу о кручении стержня швеллерного профиля к бесконечной системе уравнений. В дальнейшем приводится исследование систем для различных случаев и даются численные расчеты. Я. С. Уфлянд

6619. **Общие законы преобразований уравнений электродинамики. Аржаных И. С.**, Докл. АН УзССР, 1955, № 10, 3—8

Уравнения Максвелла записываются при помощи внешних дифференциальных форм Картана. В такой записи устанавливается инвариантность уравнений по отношению к преобразованиям независимых переменных. Устанавливается связь электродинамических величин в старых и новых осях, а также связь электрических и магнитных величин в новых переменных. П. П. Бирюлин

6620. **Диффракция электронных волн ψ_n Дирака. Фан Ван Лок** (Diffraction des ondes ψ_n de l'électron de Dirac. Phan-Van-Loc), Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse sci. math. et sci. phys., 1955, 18, 178—192 (франц.)

Рассматриваются вопросы диффракции на экранах и отверстиях волн ψ_n, подчиняющихся уравнению Дирака. Получен аналог формулы Кирхгофа для монохроматических волн ψ_n

$$4\pi\psi_n = \int_S \left\{ \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial n}\psi_n - \psi_n \frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ikr}}{r} \right\} dS + \oint_C \frac{e^{-ikr}}{r} \overline{\alpha}_n \psi_n \, dl^u, \qquad (1)$$

где C — контур, проходящий по краю экрана $\overline{\alpha}_n = \frac{1}{2}(\alpha_v\alpha_w - \alpha_w\alpha_v)$, $v, w = 1, 2, 3$, α_v — матрицы Дирака. Формула (1) прилагается к излучению диффракции плоских волн на полуплоскости и щели, а также диффракции сферических волн на круглом отверстии и полуплоскости. Результаты сравниваются с классическими результатами, вытекающими из формулы Кирхгофа для скалярных полей. Показано, что поправки, даваемые контурным интегралом формулы (1) на далеких расстояниях от отверстия, малы в очень широких пределах изменения волнового числа k. Отношение поправки к главному члену формулы (1) для диффракции плоской волны на полуплоскости имеет порядок $\sqrt{\lambda/z}$, где λ — длина волн Де-Бройля, z — расстояние от края экрана, а для случая диффракции сферической волны на круглом отверстии имеет порядок $\sin\delta$, где δ — угол, под которым видно отверстие из точки наблюдения. Ю. Н. Днестровский

См. также: 6379, 6490, 6689, 6710, 6712, 6713, 6744, 6802, 6842—6856, 6860, 6911 Д

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6621. **Новый метод решения интегральных уравнений Фредгольма. Мюллер** (A new method for solving Fredholm integral equations. Müller Claus), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 4, 635—640 (англ.)

Автор ищет решение x линейного уравнения

$$y = Lx = (E - K)x \qquad (1)$$

в гильбертовом пространстве, где E — тождественный, а K (как и сопряженный с ним) — вполне непрерывный операторы, строя последовательность $x_n = \Sigma_{\nu=1}^{n} z_\nu$, где $z_n = \lambda_n L' y_{n-1}$, $y_0 = y$, $y_n = y_{n-1} - Lz_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lambda_n = \| L'y_{n-1} \|^2 \| LL'y_{n-1} \|^{-2}$ и L' — оператор, сопряженный с L, сходящуюся по норме к существующему, если $(y, \psi) = 0$ для всех ψ с $L'\psi = 0$, решению уравнения (1) однозначно определенному, если $(x, \varphi) = 0$ для всех φ, для которых $L\varphi = 0$. А. Т. Талдыкин

6622. **Об одном классе нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Рахматуллина Л. Ф.**, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, 115, № 7, 25—29

Работа не содержит новых результатов (см., например, Гусейнов А. И., Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, 12, № 2, 193—212; Гусейнов А. И., Тр. ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1948, 3). В этих работах исследованы те же уравнения в более общих предположениях.

6623. О нелинейных сингулярных интегральных уравнениях. Кропачев В. Ф., Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1955, **30**, 115—133

Рассматривается уравнение

$$a(t)\varphi(t)+b(t)\psi(t)+w(t)=\varepsilon(\lambda)\Phi(t,\varphi,\psi(t),w,\lambda)+F(t), \quad (1)$$

где

$$\psi(t)=(1/\pi i)\int_L \varphi(\tau)(\tau-t)^{-1}\,d\tau,$$

$$w(t)=(1/\pi i)\int_L K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

L — совокупность конечного числа гладких, замкнутых, непересекающихся кривых комплексной плоскости, $t\in L$. Интеграл понимается в смысле главного значения. Ядро K — квазирегулярно, а Φ непрерывна по всем аргументам, причем по аргументам φ, ψ, w она удовлетворяет условию Липшица, а по t — условию Гёльдера. Решение $\varphi(t)$ ищется в классе ограниченных функций, удовлетворяющих условию Гёльдера: $|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant M|t_2-t_1|^{\delta}$, где $0\leqslant\delta<1$. $\varepsilon(\lambda)$ — непрерывная функция и $\varepsilon(0)=0$. $a(t)$, $b(t)$ и $F(t)$ удовлетворяют условиям Гёльдера. Сначала рассматривается случай, когда уравнение (1) не содержит $w(t)$ и в этом случае доказывается, что если индекс χ оператора $K^0\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+b(t)\psi(t)$, т. е. $\chi=(1/2\pi i)\{\ln[a(t)-b(t)]/[a(t)+b(t)]\}_L$, где $[\alpha(t)]_L$ обозначает приращение $\alpha(t)$ при обходе контура L в положительном направлении, равен нулю, то уравнение (1) имеет единственное решение. Если $\chi>0$, то решение уравнения (1) зависит от χ параметров. При $\chi<0$ решение существует лишь при выполнении дополнительных условий.

Исследование уравнения (1) в общем случае проводится в зависимости от индекса оператора $K\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+b(t)\psi(t)+w(t)$, т. е. от значения $\chi=k-k'$, где k — число линейно независимых решений уравнения $K\varphi=0$, а k' — число линейно независимых решений союзного однородного уравнения. Если $\chi=0$ и $k=0$, то уравнение (1) имеет единственное решение. Если $\chi=0$ и $k>0$, то при выполнении дополнительных условий имеет место разветвление решений. Разобраны случаи $\chi<0$ и $k'\geqslant 0$, а также $\chi>0$ и $k\geqslant 0$. Аналогичные предложения имеют место для систем, подобных уравнению (1). М. М. Вайнберг

6624. Особые интегральные уравнения типа свертки и площадная задача типа задачи Римана. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, № 8, 21—33

Рассматривается однородное интегральное уравнение

$$f(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}k_1(x-t)f(t)\,dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{0}k_2(x-t)f(t)\,dt=0 \quad (1)$$

при следующих условиях:

$$k_i(x)e^{-yx}\subset L(-\infty,\infty),\ a_i\leqslant y\leqslant b_i\ (i=1,2),\ \max(a_1,a_2)=a<b=\min(b_1,b_2).$$

Решение $f(x)$ ищется в классе функций, удовлетворяющих условиям:

$$f_+(x)e^{-yx}\in L^2(-\infty,\infty),\ y\geqslant b_1;$$

$$f_-(x)e^{-yx}\in L^2(-\infty,\infty),\ y\leqslant a_2;$$

где $f_+(x)=f(x)$ при $x>0$, $f_+(x)=0$ при $x\leqslant 0$ и $f_-(x)=f_+(x)-f(x)$. Пусть $K_1(x+ib_1)$, $K_2(x+ia_2)$, $F^+(x+ib_1)$. $F^-(x+ia_2)$ — преобразования Фурье соответствующих функций $k_1(x)e^{-b_1x}$, $k_2(x)e^{-a_2x}$, $f_+(x)e^{-b_1x}$, $f_-(x)e^{-a_2x}$.

Пусть $K_1(z)$, $K_2(z)$, $F^+(z)$ и $F^-(z)$ — аналитические функции в соответственных областях $a_1<\operatorname{Im}z<b_1$, $a_2<\operatorname{Im}z<b_2$, $b_1<\operatorname{Im}z$, $\operatorname{Im}z<a_2$ и имеющие соответственно следующие предельные значения: $K_1(x+ib_1)$, $K_2(x+ia_2)$, $F^+(x+ib_1)$, $F^-(x+ia_2)$. Обозначим через z_{ik}, $k=1,2,\ldots,\nu_i$, точки, в которых функция $1+K_i(z)$ обращается в нуль $(i=1,2)$. Применением преобразования Фурье решение уравнения (1) сводится к отысканию функций $F^+(z)$ и $F^-(z)$, обладающих следующими свойствами: 1) $F^+(z)$ ($F^-(z)$) — аналитическая функция в области $\operatorname{Im}z>a$ ($\operatorname{Im}z<b$), за исключением, быть может, точек z_{1k} (z_{2k}), в которых функция $F^+(z)\times F^-(z)$ может иметь полюса порядков не больше порядка соответствующего нуля z_{1k} (z_{2k}). 2) функции $F^+(z)$, $F^-(z)$ исчезают на бесконечности и в полосе $a<\operatorname{Im}z<b$ удовлетворяют следующему «площадному» условию

$$F^+(z)[1+K_1(z)]=F^-(z)[1+K_2(z)].$$

Эта задача называется «площадной». Последняя задача может быть сведена к эквивалентной краевой задаче Римана. Эта задача решается эффективно. Оказывается, что она имеет $n+\nu_1+\nu_2$ линейно независимых решений, если $n+\nu_1+\nu_2>0$, где

$$n=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}d\ln\frac{1+K_2(x)}{1+K_1(x)},$$

и единственное нулевое решение $F^+(z)\equiv F^-(z)\equiv 0$, если $n+\nu_1+\nu_2\leqslant 0$. Решение уравнения (1) строится по формуле

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\int_{ib_1-\infty}^{ib_1+\infty}F^+(t)e^{-itx}\,dt-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{ia_2-\infty}^{ia_2+\infty}F^-(t)e^{-itx}\,dt.$$

Аналогичному исследованию подвергается парное интегральное уравнение вида

$$f(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}k_1(x-t)f(t)\,dt=0,\quad 0<x<\infty,$$

$$f(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}k_2(x-t)f(t)\,dt=0,\quad -\infty<x<0. \quad (2)$$

В отличие от $L_2(-\infty,\infty)$, в рассматриваемом классе решение уравнений (1) и (2) различны по своему характеру. Вопросы, близкие к этим, рассматривались ранее в следующих работах: Wiener N., Hopf E., Sitz. Berlin. Akad. Wiss., 1931; Фок В. А., Матем. сб., 1944, 14/56/, № 1—2, 3—49; Рапопорт И. М., Докл. АН СССР, 1948, **59**, № 8, 1403—1407, Сб. тр. Ин-та матем. АН УССР, 1949, № 12, 102—119; Черский Ю. И. (РЖМат., 1954, 5618). И. Ц. Гохберг

6625. Решение задачи Трантера о парных интегральных уравнениях. Кук (A solution of Tranter's dual integral equations problem. Cooke J. C.), Quart J. Mech. and Appl. Math., 1956, **9**, № 1, 103—110 (англ.)

Формально трактуются уравнения

$$\int_0^{\infty}G(u)g(u)J_{\nu}(\rho u)\,du=h(\rho)\quad(0<\rho<1), \quad (1)$$

$$\int_0^\infty g(u)\,J_\nu(\rho u)\,du = 0 \quad (\rho > 1) \qquad (2)$$

с неизвестной функцией $g(u)$ и известной функцией $G(u)$. Решение ищется в виде

$$g(u) = \frac{2^k}{\Gamma(1-k)}\,u^{1+k}\int_0^1 f(t)\,t^{\alpha+1}J_{\nu-k}(ut)\,dt,$$

$(0 < \mathrm{Re}\,(k) < 1,\ \mathrm{Re}\,(\nu - k) > -1)$, благодаря чему уравнение (2) удовлетворяется автоматически. Для $f(t)$ получается уравнение Фредгольма

$$f(x) + x^{-\alpha}\int_0^1 K(x, t)\,t^{\alpha+1}f(t)\,dt = ax^{-\alpha-k}\,I(x),$$

где

$$I(x) = \int_0^1 t^{\nu+1}(1-t^2)^{-k}\,\{(\nu - 2k + 2)\,h(xt) + xth'(xt)\}\,dt,$$

$$K(x, t) = \int_0^\infty \{au^{2k}\,G(u) - 1\}\,uJ_{\nu-k}(ut)\,J_{\nu-k}(ux)\,du.$$

Параметры a, k выбираются так, чтобы произведение $a^{-1}u^{-2k}$ в каком-то смысле аппроксимировало функцию $G(u)$. Показано, что к уравнениям (1), (2) при $\nu = 0$ или $\nu = 1$ сводятся некоторые задачи электростатики и гидродинамики вязкой жидкости для двух параллельных коаксиальных дисков одинакового диаметра или для одного диска между двумя параллельными плоскостями. Н. И. Ахиезер

6626 Д. Применение метода интегральных уравнений к задачам дифракции. Югова Г. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1956

См. также: 6557, 6569, 6691, 6743, 6857

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6627. Вариационный алгоритм. Янг (A variational algorithm. Young L. C.), Riv. mat. Univ. Parma, 1954, 5, № 4—5, 255—268 (англ.)

Рассматривается вариационная задача для параметрически заданных поверхностей, причем в число допустимых поверхностей включаются также обобщенные поверхности, определенные в предыдущей работе автора (реф. 6503). Интеграл функции f по поверхности L обозначается через (L, f). Выражение $f + \varphi$ называется гомологичным f, если (L, φ) зависит только от границы L. Пусть λ — обобщенная граница поверхности L и Λ — множество всех таких обобщенных границ.

Доказывается теорема: Пусть функция f_0 гомологична непрерывной функции и $\lambda_0 \in \Lambda$. Предположим, что L_0 — обобщенная поверхность с обобщенной границей λ_0, для которой $(L_0, f_0) \leqslant (L, f_0)$ при любой обобщенной поверхности L с той же обобщенной границей λ_0. Тогда существует неотрицательная функция f_1, гомологичная f_0 и такая, что $(L_0, f_1) = 0$. Р. С. Гутер

6628. О решении одной изопериметрической задачи. Пуччи (Sulla risoluzione di un problema isoperimetrico. Pucci Carlo), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 39, 393—400 (итал.)

Рассматривается задача Пиконе о форме подводной части корабля (РЖМат, 1956, 1419). А. В. Погорелов

6629. Экстремальные кривые вариационной задачи $\delta\int f(\varkappa, \varkappa')ds = 0$. **Кастро-Бжезицкий** (Curvas extremales del problema variacional $\delta\int f(\varkappa, \varkappa')\,ds = 0$. Castro Brzezicki A. de), Rev. mat. hisp.-amer., 1955, 15, № 3—4, 71—78 (исп.)

Кривизна $\varkappa$ и кручение σ кривой, вдоль которой интеграл

$$I = \int f(\varkappa, \varkappa')\,ds$$

(штрихом обозначается производная по дуге s) принимает экстремальное значение, удовлетворяют системе уравнений

$$\varkappa v - \sigma^2 u + u'' = 0, \qquad (1)$$

$$\sigma' u + 2\sigma u' = 0, \qquad (2)$$

где

$$u = \frac{\partial f}{\partial \varkappa} - \frac{d}{ds}\frac{\partial f}{\partial \varkappa'},\quad v = \varkappa u + \varkappa'\frac{\partial f}{\partial \varkappa'} - f.$$

Уравнение (2) имеет первый интеграл $\sigma u^2 = c$, и система может быть записана в следующем виде: $v' = \varkappa u'$, $(u')' = -\varkappa v + \sigma(c/u)$, $(c/u)' = -\sigma u'$.

Вследствие аналогии с системой уравнений Серре—Френе, она допускает первый интеграл $v^2 + (u')^2 + (c/u)^2 = a^2$, а искомая кривая может быть найдена квадратурами, если известны решения $\varkappa$ и σ. Координаты точки этой кривой находятся из условий

$$\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right) = ac\int\frac{u\varkappa ds}{(uu')^2 + c^2},$$

$$x_3 = a^{-1}\int vds.$$

А. П. Норден

6630. Геометрическая интерпретация принципа Релея и вариационного принципа Швингера. Чеймберс (The geometrical interpretation of Rayleigh's principle and Schwingers variational principle. Chambers Liewelyn Gwyn), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 331—332 (англ.)

Известно, что отношение $\mu^2 = C/G$ двух положительно определенных квадратичных форм

$$C(x, x) = \sum_{r,s}^\infty c_{rs}x_rx_s,\quad G(x, x) = \sum_{r,s}^\infty g_{rs}x_rx_s$$

имеет бесконечное число стационарных значений $\mu^2 > 0$, $\mu_0^2 \geqslant \mu_1^2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n^2 \geqslant \ldots > 0$ (принцип Релея). Показано, что вариационный принцип Швингера представляет собой вырожденную форму принципа Релея, в которой квадратичная форма $C(x, x)$ заменена квадратом линейной формы $B(x, x) = \{A(x)\}^2$, где $A(x) = \Sigma_r^\infty a_r x_r$. При этом существует только одно положительное собственное значение, а все остальные равны нулю.

Когда отношение C/G принимает стационарное значение, вырожденная гиперквадрика $C(x, x) - \mu^2 \times G(x, x) = 0$ вырождается далее в пару гиперплоскостей, пересечение которых дает направление собственного вектора.

В вариационном принципе Швингера гиперэллипсоид $C(x, x) = \mu^2$ заменяется парой гиперплоскостей $A(x) = \pm\mu$, которые при стационарном значении μ должны касаться эллипсоида. Отсюда следует, что для приближенного значения собственного вектора величина отношения B/G будет меньше величины μ_0^2.

Ю. Н. Днестровский

См. также: 6503, 6742, 6744, 6838

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

6631. Экстремумы функций дискретной переменной. Маневич Д. В., Тр. Ин-та матем. и механики АН УзбССР, 1953, № 11, 92—96

Функция $f(x)$ определена в точках линейной решетки $x = a,\ a+h,\ a+2h, \ldots$. Указывается элементарный прием для отыскания локальных экстремумов $f(x)$. Вводится непрерывная функция $\overline{f}(x)$, совпадающая с $f(x)$ в точках решетки, и находятся корни уравнения

$$[\overline{f}(x) - \overline{f}(x+h)]\,[\overline{f}(x) - \overline{f}(x-h)] = 0 \qquad (1)$$

В каждом интервале между двумя соседними корнями (1) любая точка решетки дает экстремум функции $f(x)$, если левая часть (1) в этом интервале положительна, и ни одна точка решетки не дает экстремума, если эта левая часть отрицательна. А. Я. Хинчин

6632. К вопросу о средних величинах. Лабутин Д. Н., Уч. тр. Пятигор. гос. пед. ин-та, 1955, 8, 13—19

Пусть $p(x) > 0$ и $f(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Полагая $f_0(x) = g_0(x) = G_0(x) = f(x)$, автор вводит средние

$$f_n(x) = q^{-1}\int_a^x f_{n-1}(t)\,p(t)\,dt,\quad g_n(x) =$$

$$= \exp\left[q^{-1}\int_a^x \ln g_{n-1}(t)\,p(t)\,dt\right],$$

$$G_n(x) = q\left(\int_a^x \frac{p(t)}{G_{n-1}(t)}\,dt\right)^{-1},$$

$$\left[q = \int_a^x p(t)\,dt\right].$$

При рассмотрении средних $g_n(x)$ предполагается, что $f(x) > 0$, а при рассмотрении $G_n(x)$, что $f(x) \neq 0$. Доказано, что с возрастанием n все эти средние равномерно (последнее не отмечено, хотя используется в конце работы) сходятся к $f(a)$. Приводятся некоторые следствия. И. П. Натансон

6633. О главной части остаточного члена формулы Тэйлора. Шостак Р. Я. В сб.: Механика (МВТУ, 50), М., Оборонгиз, 1956, 363—366

Приводимые доказательства не являются убедительными. А. Г. Школьник

6634. Об одном виде симметризации и его приложениях. Сегё (On a certain kind of symmetrization and its applications. Szegö G.), Ann mat. pura ed appl., 1955, **40**, 113—119 (англ.)

Периодической функции $r(\varphi)$ с периодом 2π ставится в соответствие «усредненная» функция

$$S_n[r(\varphi)] = \{r(\varphi)\,r(\varphi + 2\pi/n)\ldots r(\varphi + (n-1)\,2\pi/n)\}^{1/n}$$

и доказывается теорема: Если L_0 и L_1 — две замкнутые кривые, звездообразные относительно точки 0, лежащей внутри L_0, причем L_0 лежит внутри L_1, D — кольцеобразная область, ограниченная L_0 и L_1, и $r = r_0(\varphi)$, $r = r_1(\varphi)$ — полярные уравнения L_0 и L_1 (0 — полюс), то

$$\iint_D (\nabla u)^2\,d\sigma \geqslant \iint_{\overline{D}} (\nabla \overline{u})^2\,d\sigma,$$

где $\overline{D}$ — кольцеобразная область между кривыми $\overline{L}_0 : r = S_n[r_0(\varphi)]$ и $\overline{L}_1 : r = S_n[r_1(\varphi)]$, $\Delta u = \Delta \overline{u} = 0$, $u = 0$ на L_0, $u = 1$ на L_1, $\overline{u} = 0$ на $\overline{L}_0$ и $\overline{u} = 1$ на $\overline{L}_1$. Результат интерпретируется в терминах логарифмической емкости цилиндрических конденсаторов и обобщается на многомерные пространства. В. И. Левин

6635. Об одной разрывной функции $f(x, y)$. Вагнер (Über eine unstetige Funktion $f(x, y)$. Wagner Hans), Elem. Math., 1955, **10**, № 5, 109—111 (нем).

Пример функции, непрерывной вдоль всех прямых $y = \alpha x$ и разрывной в точке (0, 0). Новых результатов нет. Э. И. Ариньш

6636. Трансцендентные числа и дифференцируемость некоторого семейства функций. Построение некоторого множества трансцендентных чисел. Четкович (Трансцендентни бројеви и диференцијабилност једне фамилије функција. Формирање једног скупа трансцендентних бројева. Ђетковић Симон). Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1954, **6**, № 1—2, 93—101 (серб.; рез. франц.)

Для любого действительного числа a положим $g_a(n) = \min_d |(d/n) - a|$, $(d/n) \neq a$ (d и n — натуральные числа) и $f(n) = \min_\xi (g_\xi(n),\ n^{-n})$, где ξ пробегает произвольное конечное множество S трансцендентных чисел. Тогда $F_S(x) = 0$ для иррациональных x и $F_S(x) = f(q)/q$ для $x = p/q$ (p — целое, q — натуральное, $(p, q) = 1$) — функция, дифференцируемая в точках множества S, а также некоторого всюду плотного множества, и в то же время разрывная во всех рациональных точках. Существует всюду плотное множество трансцендентных чисел, в точках которого $F_S(x)$ не дифференцируема. В. И. Левин

6637. Отношение двух факториалов и некоторые фундаментальные результаты теории вероятностей. Уайз (The ratio of two factorials and some fundamental probabilities. Wise M. E.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 5, 513—521; Indagationes math., 1954, **16**, № 5, 513—521 (англ.)

С помощью формулы $\binom{N}{n} = \frac{1}{2\pi i}\int_0 \frac{(1+t)^N dt}{t^{n+1}}$, где контурный интеграл справа берется в положительном направлении вокруг 0, выводится разложение для отношения двух факториалов и его логарифма

$$N!/(N-n)! = M^n\,\{1 - (n+1)\,n\,(n-1)/24M^2 +$$

$$+ (n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(5n+7)/5760\,M^4 - \ldots\},$$

$$[\lg N! - \lg (N-n)!]/n = \lg M - \{1 + (2M)^{-2}\,[(3n^2/10) -$$

$$- (7/10)] + \ldots\} \cdot [n^2 - 1]/6\,(2M)^2 + \ldots,$$

где $M = N - (n/2) + (1/2)$. В работе приводятся еще некоторые члены разложений, кроме указанных. Эти и подобные им формулы используются для различных целей: обобщения формулы Валлиса, выводы формулы Стирлинга, анализа характера асимптотического поведения биномиальной вероятности в некоторых частных случаях и пр. А. А. Бобров

6638. Об интеграле Рамануджана. Брахман (Note on an integral of Ramanujan. Brachman Malcolm K.), J. Math. and Phys., 1955, **33**, № 4, 374—375 (англ.)

Дано вычисление интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \pi x \cos \alpha x \exp(-bx^2)\,dx.$$

См. также Erdélyi et al., Tables of integral transforms, vol. I, McGraw-Hill, New-York, 1954, p. 35 (43).

П. И. Кузнецов

6639. **Функциональные уравнения тригонометрических функций. Гаек** (Funkcionální rovnice trigonometrickych funkcí. Hájek Otomar), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 4, 484—485 (чеш.)
Функциональные уравнения тригонометрических функций. Гаек Отомар, Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 3, 432—434 (русс.; рез. франц.)
Все решения уравнения

$$F(x+y) = aF(x)\,G(y) + bF(y)\,G(x),$$

которые голоморфны в окрестности начала, содержатся в следующих формулах: 1) $F=0$, G — произвольная функция; 2) в случае $a+b\neq 0$: $F(x)=\alpha e^{\beta x}$, $G(x)=(a+b)^{-1}e^{\beta x}$; 3) если $a=b\neq 0$, то существуют еще решения

$$F(x)=\alpha e^{\beta x}\sin\gamma x,\ G(x)=\frac{1}{a}e^{\beta x}\cos\gamma x;$$

$$F(x)=\alpha x e^{\beta x},\ G(x)=\frac{1}{a}e^{\beta x}$$

V. Jarnik

6640. **Заметка об элементарном доказательстве производящих неравенств. Лоуан** (Note on an elementary method for generating inequalities. Lowan Arnold N.), Scripta Math., 1955, 21, № 2—3, 218—220 (англ.)
Пусть кривая $y=f(x)$ изогнута вниз. $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), \ldots, P_n(x_n,y_n)$ — точки на кривой, которым приписаны массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$, $G(\bar{x},\bar{y})$ — центр тяжести этих точек. Центр тяжести G_1 точек P_1 и P_2 лежит на хорде P_1P_2; центр тяжести точек P_1, P_2, P_3 — на отрезке G_1P_3 и т. д. Таким образом видим, что центр тяжести G лежит ниже соответствующей точки кривой. А следовательно: $\bar{y}<f(\bar{x})$. В случае кривой, изогнутой вверх: $\bar{y}>f(\bar{x})$. Подставляя в эти неравенства вместо координат центра тяжести их выражения, получаем

$$\frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)+\ldots+m_nf(x_n)}{m_1+m_2+\ldots+m_n} \lesseqgtr f\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots m_n}\right), \qquad (1)$$

где знак $<$ или $>$ зависит от того, будет ли в рассматриваемом интервале $f''(x)<0$ или >0. Беря вместо $f(x)$ различные функции, получаем из (1) различные неравенства. Так, полагая $f(x)=\log x$, выводим, что взвешенное среднее геометрическое меньше взвешенного среднего арифметического. Взяв $f(x)=x\log x$ и положив $m_1=m_2=\ldots=m_n$, находим, что

$$x_1\log x_1+x_2\log x_2+\ldots+x_n\log x_n > (x_1+x_2+\ldots x_n)\log\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

А. Г. Школьник

6641 К. **Курс высшей математики. Т. 1. Смирнов** (Učebnice vyšší matematiky. 1. díl. Smirnov V. I., Z. ruš. Praha, ČSAV, 1954, 544, [2] str., il., 48 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 11, 251 (чеш.)
Перевод с русского.

6642 К. **Курс высшей математики. Котциг** (Základy vyššej matematiky. Kotzig Anton. Bratislava, SPN, 1953, 195, [1] str., 18,45 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR, Slov. kniha, 1954, 5, jan.-febr., 31 (словац.)

6643 К. **Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. Бытя** (Curs de calcul diferențial si calcul integral. Vol. 2. Bîtea Ioan. Timișoara, Ed. Inst. politehnic. 1955, 431 p. fig., Litografiat.), Bul. bibliogr., 1955, A4, № 9, 6 (рум.)

6644 К. **Задачи по высшей математике. Т. 1. Альбрехт, Хохмут** (Übungsaufgaben sur höheren Mathematik. T. 1. Albrecht Rudolf, Hochmuth Hans, München. Oldenbourg, 1955, 123 S., ill., 9,80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 10, 522 (нем.)

6645 К. **Курс математики. I. Элементы алгебры, анализа и аналитической геометрии. Комиссер, Каньяк** (Cours de mathématiques. I. Eléments d'algèbre, d'analyse et de géométrie analytique. 4 ed., Commissaire Hyppolite, Cagnac Georges, Paris, Masson, 1954, 532 p., ill., 1 900 fr.), Bibliogr. France, 1955, 144, № 6, 127 (франц.)

6646 К. **Общая математика. Учебник для студентов вузов. Дени-Папен** (Mathématiques générales. A l'usage des élèves de l'enseignement supérieur scientifique et technique, 5 éd. Denis-Papin Maurice. Paris, Dunod, 1954, 2 vol., ill., 480 fr.), Bibliogr. France, 1955, 144, № 4, 77 (франц.)

6647 К. **Лекции по математическому анализу и алгебре. Т. I. Чинкуини, Чинкуини-Чибрарио** (Lezioni di analisi matematica, algebrica e infinitesimale. Vol. I. 3-ed. riv. con eserc., Cinquini Silvio, Cinquini Cibrario Maria, Pavia, Tip. Portiglia e Galli, 1954—1955, 327 p.), Bibliogr. ital., 1955, 89, № 647, 132 (итал.)

6648 К. **Методы вычисления определенных интегралов. Руфенер** (Die Methoden zur Ermittlung der bestimmten Integrale. Diss. Rufener Ernst. Basel, Guhl und Scheibler, 1953, 46 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, B, № 21, 1774 (нем.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

6649. **Мажорирование остаточного члена степенного ряда на круге сходимости. Риччи** (Maggiorazione del resto delle serie di cerchio di convergenza. Ricci Giovanni), Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1954, 8, № 3—4, 121—131 (итал.)

Пусть $\sum_0^\infty a_kz^k$ — степенной ряд с радиусом сходимости равным 1 и $f(z)=\sum_0^\infty a_kz^k$ — аналитическая функция, определяемая этим рядом в звезде Миттаг-Леффлера. Положим $f_n(z)=\sum_0^n a_kz^k$. Согласно классической теореме Фату — Рисса, если $a_n\to 0$ и точки $e^{i\theta}$ при $\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$ являются регулярными для $f(z)$, то $f_n(e^{i\theta})\to f(e^{i\theta})$ равномерно на $\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$ при $n\to\infty$. Автор ставит себе целью мажорировать равномерно разность $f(e^{i\theta})-f_n(e^{i\theta})$, когда $e^{i\theta}$ описывает некоторое замкнутое множество E точек регулярности для $f(z)$. Пусть $a_n\to 0$. Положим

$$A_n=|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|,$$

$$\varepsilon(u,v)=\max(|a_{n+1}|,\ |a_{n+2}|,\ldots,\ |a_v|),$$

$$\varepsilon(v,\infty)=\max(|a_{v+1}|,\ |a_{v+2}|,\ |a_{v+3}|,\ldots).$$

Ясно, что $\frac{A_n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, $\varepsilon(u, v) \to 0$ при $u \to \infty$, $\varepsilon(v, \infty) \to 0$ при $v \to \infty$. Полагаем

$$\omega_n = \omega_n(\delta) = \min_{0 \leqslant u \leqslant n \leqslant v} \left(\frac{A_u}{v-u} + \varepsilon(u, n) + \frac{\varepsilon(n, \infty)}{(1-\delta)^{v-n}} \right).$$

Далее обозначим через η_n выражение, получаемое из $\omega_n(\delta)$, если положить $v = n$. Тогда $\omega_n(\delta) \leqslant \eta_n$ и $\eta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема I. Пусть $a_n \to 0$ и $\sum_0^\infty a_n z^n$ имеет радиус сходимости, равный 1. Если E есть замкнутое множество точек $e^{i\theta}$ регулярности для $f(z)$, то существует константа $K = K(E, f)$ такая, что $|f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| < K\omega_n (\leqslant K\eta_n)$ для всех $e^{i\theta}$ из множества E.

Как следствие получается

Теорема II. Если $a_n = O(n^{-\gamma})$ $(\gamma > 0)$, то при тех же обозначениях

при $0 < \gamma < 1$ имеем $|f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| < K/n^\gamma$,

при $\gamma = 1$ $|f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| < K \lg n / n$,

при $1 < \gamma < 2$ $|f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| < K/n$,

при $\gamma \geqslant 2$ $|f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| < K/n^{\gamma-1}$.

Н. К. Бари

6650. Замечание о сумме биномиальных коэффициентов. Попов (A note about the sums of binomial coefficients. Popov B. S.), Билтен Друштвочно матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1953, кн. 4, 5—6 (англ.)

Доказательство формулы

$$\sum_{\lambda=0} (-2)^{-\lambda} \binom{n}{\varkappa+\lambda} \binom{n+\varkappa+\lambda}{\lambda} = \begin{cases} (-1)^\nu 2^{-2\nu} \binom{n}{\nu}, & n-\varkappa = 2\nu, \\ 0, & n-\varkappa \neq 2\nu. \end{cases}$$

В. И. Левин

6651. Кратно-монотонные комплексные последовательности. Зэринг (Multiply monotone complex sequences. Zaring W. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 4, 583—593 (англ.)

Автор называет комплексную последовательность $\{c_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (α, φ)-монотонной $(\varphi < \pi/2)$, если $|\arg \Delta^\alpha c_n| \leqslant \varphi$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где

$$\Delta^\alpha c_n = \sum_{k=0}^\infty \binom{k-\alpha-1}{k} c_{n+k}.$$

В статье обобщаются основные теоремы Кноппа (Knopp K., Math. Z., 1925, 22, 75—85), относящиеся к действительным α-монотонным (т. е. к $(\alpha, 0)$-монотонным) нульпоследовательностям, на комплексные (α, φ)-монотонные $(\alpha \geqslant 0)$ нульпоследовательности. Кроме того, теоремы Фейера (Fejér L., Trans. Amer. Math. Soc., 1936, 39, 18—59) о сходимости и монотонности суммы некоторых тригонометрических рядов по косинусам и по синусам, коэффициенты которых образуют действительную кратно-монотонную нульпоследовательность, распространяются на случай, когда последовательность коэффициентов этих рядов является комплексной кратно-монотонной нульпоследовательностью.

Г. Ф. Кангро

6652. Решение некоторых экстремальных задач в теории расходящихся рядов. Щеглов М. П., Докл. АН СССР, 1955, 102, № 4, 703—704

Говорят, что ряд Σa_n принадлежит к классу L, если он имеет ограниченные частные суммы s_n. Если $\Sigma a_n \in L$ и, кроме того, $a_n < C/n$ ($|a_n| < C/n$), где $0 < C < \infty$, то отнесем данный ряд к классу W (W_+). Положим: $\underline{\lim} s_n = d$, $\overline{\lim} s_n = D$, $\underline{\lim} \sigma_n = d'$, $\overline{\lim} \sigma_n = D'$, где $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k$ (преобразование Чезаро).

Изучаются следующие величины: $r = \sup_W \{d_1 - d\}$, $R = \sup_W \{D - D'\}$ и аналогичные r_+, R_+ для класса W_+. Рассматриваются также соответствующие величины для преобразования Пуассона, взятого в форме $\varphi(u) \equiv \equiv \sum_{n=0}^\infty a_n e^{-n/u}$.

И. Е. Жак

6653. Нео-шлемильховы ряды. Хейс (Neo-Schlömilch series. Hayes Wallace D.), J. Math. and Phys., 1955, 34, № 2, 129—132 (англ.)

Классическая теория рядов Шлемильха рассматривает разложение произвольных функций в ряды по функциям Бесселя данного порядка, аргумент которых пропорционален целым значениям переменного параметра m. Автор изучает разложение функции в ряды по функциям Бесселя первого вида и нулевого порядка, аргумент которых пропорционален $\sqrt{k^2 + m^2}$, где k — константа. Такими рядами можно представить периодические по x решения уравнения:

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} - \varphi_{xx} - k^2\varphi = 0.$$

К. Попов

6654. Об асимптотическом поведении интегралов Лапласа вблизи границы области сходимости. Коренблюм Б. И., Докл. АН СССР, 1955, 104, № 2, 173—176

Доказывается следующая тауберова теорема: Пусть

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-t/x}\, ds(t),$$

$$G(x) = \int_0^\infty e^{-t/x}\, d\sigma(t),$$

где $s(t)$ и $\sigma(t)$ — неубывающие функции $(s(0) = \sigma(0) = 0)$, причем оба интеграла сходятся при $0 < x < \infty$. Пусть выполняется условие $\lim \sigma(y)/\sigma(x) = 1$ (при $x \to \infty$, $1 < y/x \to 1$). Тогда, из $F(x) \sim G(x)$ при $x \to \infty$ следует $s(x) \sim \sigma(x)$ при $x \to \infty$.

В частном случае, при $s(t) = s([t])$ и $\sigma(t) = \sigma([t])$ из этой теоремы получается следующая: Пусть ряды $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ и $g(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$ с неотрицательными коэффициентами сходятся при $|x| < 1$ и пусть $s_n = \sum_0^n a_k$, $\sigma_n = \sum_0^n b_n$. Тогда, если коэффициенты ряда $g(x)$ удовлетворяют условию $\lim \sigma_m/\sigma_n = 1$ (при $n \to \infty$, $1 < m/n \to 1$), то из $f(x) \sim g(x)$ следует $s_n \sim \sigma_n$.

Этот результат содержит, в частности, известный результат Карамата (Karamata J., J. reine und angew. Math., 1931, 164, № 1, 27). Автор замечает, что условие для σ_n^1 выполняется, если $b_n = O\left(\frac{\sigma_n}{n}\right)$. Доказательство приведено полностью.

Б. Я. Левин

6655 Д. К проблеме однозначности в теории асимптотических рядов. Мейли (Über das Eindeutigkeitsproblem in der Theorie der asymptotischen Reihen. Meili Heino Jürg.— Diss. phil. Zürich, 1954, 46 S., ill.), Schweiz. Buch, 1955, B55, № 1, 46 (нем.)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

6656. **Бесселевы функции матричного аргумента.** Херц (Bessel functions of matrix argument. Herz Carl S.), Ann. Math., 1955, **61**, № 3, 474—523 (англ.)

Гипергеометрические функции обобщаются на случай матричного аргумента Λ (матрица $m \times m$), В основном рассматриваются функции $A_\delta^{(m)}(\Lambda)$, где $A_\delta(t)=t^{\delta/2}J_\delta(2\sqrt{t})$. Главные результаты относятся к: 1) обобщению на матричные аргументы формул теории бесселевых функций, 2) теории преобразования Ганкеля

$$\int_{M>0} A_\gamma^{(m)}(\Lambda M)\, f(M)\,(\det M)^\gamma\, dM = g(\Lambda),$$

где $\gamma > -1$, а Λ и M — положительно дефинитные матрицы, которое является унитарным отображением гильбертова пространства функций $f(\Lambda)$, для которых $\int_{\Lambda>0} |f(\Lambda)|^2 (\det \Lambda)^\gamma\, d\Lambda < \infty$, на самого себя, и 3) гармоническим многочленам матричного аргумента T (матрица $k \times m$), т. е. гармоническим многочленам $P(T)$ km переменных, удовлетворяющих соотношению $P(TZ) = (\det Z)^\nu P(T)$ при некотором целом ν и всех симметрических $m \times m$-матрицах Z. В. И. Левин

6657. **Заметка об определенных интегралах от произведения трех функций Лежандра.** Эллестад (Note on the definite integral over products of three Legendre functions. Gjellestad Guro), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1955, **41**, № 11, 954—956 (англ.)

Показаны два случая, когда интеграл от произведения трех функций Лежандра

$$\int_{-1}^{+1} P_{l_1}^{m_1}(\mu)\, P_{l_2}^{m_2}(\mu)\, P_{l_3}^{m_3}(\mu)\, d\mu \qquad (1)$$

(где m и l — целые положительные числа и $m_1 = m_2 + m_3$) обращается в нуль, несмотря на то, что выполнены известные условия

$$l_1 + l_2 + l_3 \text{ — четно}, \quad l_2 - l_1 \leqslant l_3 \leqslant l_2 + l_1,$$

необходимые, но недостаточные для того, чтобы интеграл (1) не обращался в нуль. Эти два случая суть следующие:

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^w(\mu)]^2\, P_2(\mu)\, d\mu = 0 \begin{pmatrix} m_1 = m_2 = w; & m_3 = 0 \\ l_1 = l_2 = n; & l_3 = 2 \end{pmatrix},$$

если n и w удовлетворяют соотношению: $n(n+1) - 3w^2 = 0$, и

$$\int_{-1}^{1} [P_n^w(\mu)]^2\, P_4(\mu)\, d\mu = 0 \begin{pmatrix} m_1 = m_2 = w; & m_3 = 0 \\ l_1 = l_2 = n; & l_3 = 4 \end{pmatrix},$$

если выполняется соотношение:

$$35w^4 - 5(6n^2 + 6n - 5)w^2 + 3(n-1)n(n+1)(n+2) = 0.$$

Приведены первые целочисленные решения этих уравнений и рекуррентное соотношение для целочисленных решений первого уравнения. Э. Л. Блох

6658. **Оценки для функций Лежандра.** Сигел (Bounds of the Legendre function. Siegel Keeve M.), J. Math. and Phys., 1955, **34**, № 1, 43—49 (англ.)

Выводятся оценки для функций Лежандра

$$P_{n_i}(x) = {}_2F_1(-n_i, n_i + 1;\ 1;\ (1-x)/2)$$

при целых и нецелых индексах n_i. Результаты получены в предположении выполнения краевых условий типа

$$P_{n_i}(x)|_{x=x_0} = 0, \quad dP_{n_i}(x)/dx\,|_{x=x_0} = 0$$

или их комбинаций. П. И. Кузнецов

6659. **О функциях Лежандра.** Янкович (Über die Legendreschen Funktionen. Janković Zlatko), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1955, **10**, № 1—2, 3—36 (нем.; рез. хорв.)

Дальнейшее развитие принадлежащей автору идеи построения теории специальных функций, исходя из рекуррентных соотношений, получаемых непосредственно из дифференциальных уравнений для этих функций (РЖМат, 1954, 5557; 1955, 1817; 1956, 2311). В настоящей работе данный метод применяется для исследования сферических функций $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$ с целочисленными и произвольными значениями индексов μ и ν.

Автор дает вывод известных функциональных соотношений, не основывающийся на теории гипергеометрической функции или явных представлениях сферических функций через ряды или определенные интегралы. Н. Н. Лебедев

6660. **Представление в явном виде турановых выражений.** Данезе (Explicit evaluations of Turán expressions. Danese Arthur E.), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **38**, 339—348 (англ.)

Туран (Turán Paul, Časopis pro pěstovaní. Mat. a fys., 1950, **75**, 113—122) при исследовании свойств нулей полиномов Лежандра $P_n(x)$ ввел в рассмотрение выражение

$$\Delta_n(x) = [P_n(x)]^2 - P_{n+1}(x)\, P_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1,$$

и доказал, что $\Delta_n(x) \geqslant 0$, $|x| \leqslant 1$ (знак равенства только при $|x| = 1$). Вслед за этим, в работах других авторов аналогичные результаты были получены для полиномов Эрмита, Лагерра, ультрасферических и т. д., а для полиномов Лежандра доказано также неравенство

$$D_n(x) \equiv [dP_n(x)/dx]^2 - dP_{n+1}(x)/dx \cdot dP_{n-1}(x)/dx > 0, \quad \begin{matrix} n \geqslant 1, \\ -\infty < x < \infty. \end{matrix}$$

Автор называет выражения вида $\Delta_n(x)$ и $D_n(x)$ турановыми и получает для них, в различных системах полиномов, представление в явном виде через полиномы соответствующей системы, откуда неравенства $\Delta_n(x) \geqslant 0$, $D_n(x) \geqslant 0$ следуют сразу. Например, для обобщенных полиномов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ доказывается, что

$$\left[\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x)\right]^2 - \frac{d}{dx} L_{n+1}^{(\alpha)}(x) \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)} [L_k^{(\alpha)}(x)]^2, \quad n \geqslant 1,\ \alpha > -1.$$

Библ. 22 назв. И. Б. Погребысский

6661. **О действительных нулях вырожденного гипергеометрического ряда.** Чайковский Я., Титц Т., Успехи матем. наук, 1955, **10**, №4, 161—165

Авторы строят для вырожденной гипергеометрической функции $F(a, b, x)$ (a и b — действительные) последовательность Штурма в интервале $[0, \alpha)$, $\alpha > 0$. Пользуясь теоремой Штурма в форме, использованной Гурвицем при определении числа действительных нулей гипергеометрического ряда $F(a, b; c; x)$ при действительных a, b и c (Hurwitz A., Math. Annalen, 1891, **38**, 452—458) и асимптотикой функции $F(a, b, x)$ для больших значений x, они легко находят число положительных нулей функции $F(a, b, x)$ в $[0, \alpha)$ для достаточно больших α. Вопрос о числе отрицательных нулей функции $F(a, b, x)$ решается при помощи соотношения $F(a, b, x) = e^x F(b - a, b, -x)$. Впервые задача о числе действительных нулей функции $F(a, b, x)$ была (довольно громоздко) решена Кинастом в 1921 г. (см. также РЖМат, 1954, 3370). М. Н. Олевский

6662. Многочлены Чебышева. Пирко, Ярох (Mnohočleny Čebyševovy. Pírko Zdeněk. Jaroch Otakar), Slaboproudý obzor, 1956, 17, № 1, 28—33; № 2, 91—96; № 3, 149—154 (чеш.; рез. русс., нем., англ., франц.)

6663 К. Функции Матье и сферические функции и их применение в физических и технических проблемах. Мейкснер (Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen mit Anwendungen auf physikalische und technische Probleme. Meixner Josef. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verl., 1954, XII, 414 S., 52.60—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 11, 589 (нем.)

6664 К. Вырожденные гипергеометрические функции и их применения. Буххольц (Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Buchholz Herbert. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verl., 1953, XVI, 234 S., 36.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 13, 700 (нем.)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6665. Одна формула обращения преобразования Лапласа. Рюс (Eine Umkehrformel zur Laplace — Transformation. Rühs Fritz), Wiss. Z. Univ. Rostock. Math-. naturwiss. Reihe, 1954/1955, 4, № 1, 23—26 (нем.)

Пусть $f(x)$ интегрируема и $\int_0^a |f(x)|\,dx<\infty$, для любого конечного a. Пусть далее существует такое действительное число $s=s_0$, что $\int_0^\infty e^{-s_0\xi}|f(\xi)|\,d\xi<\infty$. Тогда (см. Диткин В. А., Кузнецов П. И., Справочник по операционному исчислению, ГИТТЛ, 1951) существует для каждого $s>s_0$, $F(s)=\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)\,d\xi$, причем $F^{(n)}(s)=\int_0^\infty e^{-s\xi}(-\xi)^n f(\xi)\,d\xi$.

Определяется функция для всякого действительного $\nu\geqslant 1$

$$f_s(x)=\frac{e^{-sx}}{s^{\nu-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(s^2x)^{n+\nu}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}F^{(n)}(s).$$

Автор доказывает, что в этом случае $\lim_{s\to\infty}f_s(x)=f(x)$ для тех точек x, где $\int_x^\xi |f(x)-f(y)|\,dy=o(|x-\xi|)$.

В конце работы автор дает асимптотическую оценку

$${}_1F_1(1,\nu+1,sx)\sim\Gamma(\nu+1)\,e^{sx}/(sx)^\nu\ (s\to\infty).$$

П. И. Кузнецов

6666. Теоремы сходимости для обобщенного интеграла Лапласа. Сингх (Convergence theorems for a generalized Laplace integral. Singh Vikramaditya), Math Z., 1956, 64, № 1, 1—9 (англ.)

Рассматривается преобразование Варма

$$f(s)=\int_0^\infty (st)^{m-1/2}e^{-st/2}W_{\kappa,m}(st)\,d\alpha(t),$$

где $W_{k,m}(x)$ — функция Уиттекера. Для абсцисс сходимости σ_{cs} и σ_{cm} в плоскостях комплексного переменного s и комплексного параметра m выводятся формулы: если $\alpha(t)=O(t^n)$ при $t\to 0$ и $\operatorname{Re}(n+1)>0$, $\operatorname{Re}(2m++n+1)>0$, то $\sigma_{cs}=|\overline{\lim}_{t\to\infty}\log|\alpha(t')-\alpha(t)|/t$, где $t'=[t]$, и если $\alpha(t)=O(t^\nu)$ при $t\to\infty$, $\operatorname{Re}s>\nu$, то

$$\sigma_{cm}=-[\overline{\lim}_{t\to 0}\{\log|\alpha(t)|/\log t\}]/2.$$

Для этого преобразования при вещественных s, m, k устанавливаются теоремы Абеля и Таубера, в частности: если интеграл $f(s)$ сходится для $s>0$ и $\lim_{s\to+0}f(s)=A$, то $\lim_{t\to\infty}\alpha(t)=A$ в том и только в том случае, когда $\int_0^t u\,d\alpha(u)=o(t)$ при $t\to\infty$. В. И. Левин

6667. Об асимптотическом поведении преобразования Ганкеля. Гриффит (On the asymptotic behaviour of Hankel transforms. Griffith J. L.), J. and Proc. Roy. Soc. N. S. Wales., 1954 (1955), 88, № 4, 71—76 (англ.)

Ссылаясь на две теоремы, полученные в одной из своих предыдущих работ (РЖМат, 1956, 3123), автор доказывает соотношение

$$\lim_{u\to\infty}\{u^{p+2-a}\bar g(u)\}=\frac{\Gamma\left(\frac12 p+\frac12\nu-\frac12 a+1\right)}{2^{a-1}\Gamma\left(\frac12 p+\frac12\nu+\frac12 a\right)}\times$$

$$\times\lim_{k\to 0+}\left\{(-1)^p x^{p+\nu+a}\left(\frac{d}{xdx}\right)^p\left(\frac{g(x)}{x^\nu}\right)\right\},$$

где $g(x)$ и $g(u)$ связаны преобразованием Ганкеля:

$$\bar g(u)=\int_0^\infty xJ_\nu(ux)\,g(x)\,dx,\ g(x)=\int_0^\infty uJ_\nu(xu)\,\bar g(u)\,du,$$

которое при $p=0$ было получено в указанной выше предыдущей статье. Это соотношение видоизменяется и распространяется для случаев, когда $g(x)$ и ее производные имеют конечное число конечных разрывов. Э. Л. Блох

6668. Свертка для негармонических рядов Фурье. Самнер (Convolution transforms related to nonharmonic Fourier series. Sumner D. B.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 1, 89—100 (англ.)

Пусть $\lambda_n=\rho+n-\delta+2\delta\alpha_n$, $\mu_n=n-\delta+2\delta\beta_n$ $(n=1,2,\ldots)$,

$$0\leqslant\alpha_n,\ \beta_n\leqslant 1,\ 0\leqslant\delta<1/4,\ 0\leqslant\rho<1-2\delta;$$

действительные числа.

Рассматривается целая функция экспоненциального типа

$$E(w)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-w/\lambda_n)\,(1+w/\mu_n)$$

возрастающая на всех прямых параллельных мнимой оси и принадлежащая к L^2 для $1<q\leqslant 2$ на действительной оси.

Строится функция

$$G(z)=\lim_{R\to\infty}(2\pi i)^{-1}\int_{c-iR}^{c+iR}\exp(zw)\,dw/wE(w)\ (0<c<\lambda_1).$$

Она голоморфна в полосе B $|\operatorname{Im}(z)|<\pi$. За ядро свертки принимается G

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}G(z-t)\,\varphi(t)\,dt. \qquad (1)$$

Доказываются:

Теорема 1. Пусть $\varphi(t)\in L(0,R)$ для некоторого R и интеграл (1) сходится по крайней мере в одной точке z полосы B и пусть $\Phi(t)=\int_0^\infty\varphi(u)\,du$. Тогда интеграл (1) сходится для всех $z\in B$ и определяет в этой полосе аналитическую функцию. Кроме того,

$$\Phi(t)=\begin{cases}o(\exp t\lambda_1) & (t\to\infty)\\ o(\exp -t\Delta) & (t\to-\infty)\end{cases}$$

для некоторого положительного Δ.

Теорема 2. Пусть $\varphi(t)\in L(0,R)$ для некоторого R и интеграл (1) сходится по крайней мере для одного

$z \in B$. Тогда если $f(z)$ определена при помощи интеграла (1) и

$$DE(D)\cdot f(x) = \lim_{\theta\to 1}(2\pi)^{-1/2}\int_{-\pi}^{\pi} k(y)\, f'(x+iy\theta)\, dy$$

$$(D = d/dx),$$

где $k(y) = \lim^{(p)}_{R\to\infty}(2\pi)^{-1/2}\int_{-R}^{R} E(u)\exp(-iuy)\, du$

$$(p \geqslant 2),\ k(y) = 0 \text{ для } |y| > \pi,$$

то $$DE(D)\cdot f(x) = [\varphi(x+) + \varphi(x-)]/2$$

когда правая часть имеет смысл. П. И. Кузнецов

6669. **Поправка непрерывных средних при помощи последовательных подстановок. Брейсуэлл** (Correcting for running means by successive substitutions. Bracewell R. N.), Austral. J. Phys., 1955, 8, № 3, 329—334 (англ.)

Пусть $g(x)$ определяется равенством

$$g(x) = \xi^{-1}\int_{x-\frac{1}{2}\xi}^{x+\frac{1}{2}\xi} f(\tau)\, d\tau.$$

Рассматривается задача нахождения $f(x)$ по данной функции $g(x)$. Пользуясь функцией $\Pi_\xi(x)$, которая равна ξ^{-1} при $|x| < \xi/2$ и равна 0 при $|x| > \xi/2$, имеем $g(x) = \Pi_\xi * f$, где $*$ означает свертывание функций. Искомую функцию предлагается аппроксимировать последовательностью

$$g,\ f_1 = 2g - \Pi_\xi * g,\quad f_2 = 3g - 3\Pi_\xi * g + \Pi_\xi * \Pi_\xi * g, \ldots$$

Без доказательства дается условие сходимости этой последовательности, содержащее преобразования Фурье от Π_ξ и g. Приводятся рассуждения об асимптотическом характере этой последовательности в случае ее расходимости, поясняя это примером. Указывается значение задачи для физики и астрономии. Н. А. Бразма

6670. **О преобразованиях Мейера. Джайн** (On Meijer transform. Jain Mahendra Kumar), Acta math., 1955, 93, № 1—2, 121—168 (англ.)

Преобразованием Мейера функции $f(t)$ называется функция

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st/2}(st)^{-k-1/2} W^{(st)}_{k+1/2,\, m} f(t)\, dt.$$

Формула обращения имеет вид

$$f(t) = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(1-k+m)}{\Gamma(1+2m)}\times$$

$$\times\int_{\beta-\lambda t}^{\beta+\lambda t} e^{st/2}(st)^{k-1/2} M^{(st)}_{k-1/2,\, m} F(s)\, ds.$$

где $M^{(z)}_{k,\,m}$ и $W^{(z)}_{k,\,m}$ — функции Уиттекера.

Рассматривается это преобразование, развивается операционное исчисление для него и приводится много различных примеров. П. И. Кузнецов

6671. **О некоторых интегральных представлениях функций в связи с дифференциальными уравнениями. Обрешков** (Върху някои интегрални представяния на функции във връзка с диференциални уравнения. Обрешков Н.). Изв. Матем. ин-т Българ. АН, 1954, 1, № 2, 3—33 (болг.; рез. русс., франц.)

Для интегральных преобразований

$$f(x) = \int_0^\infty \Phi(xt)\,\varphi(t)\, dt,$$

$$f(x) = \int_0^\infty \Phi(xt)\, d\omega(t),$$

где

$$\Phi(x) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u-v-x/uv} u^{\alpha-1} v^{\delta-1}\, du\, dv \quad (\alpha > 0,\ \delta < 1),$$

исследуются вопросы, аналогичные исследованным автором ранее для функции

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-x/t-t} t^{\delta-1}\, dt \quad (\delta > 0)$$

(РЖМат, 1954, 3757). Как указывает автор, после написания статьи ему стала известна работа Хиршмана и Уиддера (Hirschman I. I., Widder D. V., Trans Amer. Math. Soc., 1949, 66, 135—201), где другим методом доказываются теоремы, аналогичные теоремам автора. Б. И. Коренблюм

6672 К. **Справочник по операционному исчислению. Основы операционного исчисления. Таблицы формул. Дитткин, Кузнецов** (Příručka operátorového počtu. Základy theorie a tabulky operatorů. Ditkin V. A., Kuzněcov P. I., Z. ruš. Praha, ČSAV, 1954, 338, [1] str., 24 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR, České knihy, 1955, № 7, 130—131 (чеш.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

6673. **О линейно деформируемых вязкоупругих телах. Мандель** (Sur les corps viscoélastiques à comportement linéaire. Mandel Jean), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 25, 1910—1912 (франц.)

Предлагается решать преобразованием Лапласа уравнения Больцмана — Вольтерра для линейно деформируемых тел с наследственной упругостью. Указывается, что решения задач в случае квазистатического деформирования могут получаться из решений соответствующих задач о равновесии идеально упругого тела заменой упругих постоянных ε, μ на функции ε^*, μ^* параметра p в пространстве изображений с последующим переходом к оригиналам. Этот вывод не является новым. Найденный Ю. Н. Работновым в 1948 г. (Прикл. матем. и механ., 1948, 12, № 1; Вестн. МГУ, 1948, № 10), он получил широкое применение в трудах А. Р. Ржаницына (Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени, ГТТИ, 1949), Н. Х. Арутюняна (Некоторые вопросы теории ползучести, ГТТИ, 1952) и многих других советских и зарубежных авторов. Н. А. Ростовцев

6674. **О некоторых применениях P-функции в области физики. Мастерс** (Some applications in physics of the P-function. Masters Joseph I.), J. Chem. Phys., 1955, 23, № 10, 1865—1874 (англ.)

P-функция есть интеграл вероятностей для нормального кругового распределения на плоскости и численно равен вероятности попадания в площадь круга радиуса Z с центром в точке $x = R$. Выбирая начало в центре круга, этот интеграл может быть записан в виде

$$P(Z/\sigma, P/\sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\int_0^Z \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) r\, dr\, d\theta, \quad (1)$$

где $x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$ и σ^2 — дисперсия. Для удобства применения функция P нормализована так, чтобы эта функция была равна единице при $R = 0$.

Нормализованная функция P^* может быть записана так:

$$P^*(Z/\sigma, R/\sigma) = \frac{P(Z/\sigma, R/\sigma)}{P(Z/\sigma, 0/\sigma)} =$$

$$= \frac{\exp(-R^2/2\sigma^2)}{\sigma^2[1-\exp(-Z^2/2\sigma^2)]}\int_0^Z \exp(-r^2/2\sigma^2)\, I_0(rR/\sigma^2)\, r\, dr,$$

где

$$I_0\left(\frac{rR}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(rR\cos\theta/\sigma^2)\, d\theta,$$

функция, рассмотренная Г. Н. Ватсоном (Теория бесселевых функций, М., Изд-во ин. лит., 1949). Таблицы P^*функции и нормализующего множителя $P(Z/\sigma, 0/\sigma)$ приведены в статье. Автор рассматривает некоторые свойства Pфункции и показывает ее применение при рассмотрении шума после детектора и в классической теории диффузии, в частности в вопросах теплопроводности. А. Г. Корман

6675. **Конечные части интегралов Римана — Вейля и методы регуляризации. Гонсалес-Доминге с** (Les parties finies des intégrales de Riemann-Weyl et les méthodes de régularisation. Gonzalez Dominguez A.), Sémin. théor. phys. (Sémin. L. Broglie) Fac. sci. Paris, 1954/1955, 24, № 4, 1—13 (франц.)

Приведены правила для вычисления некоторых расходящихся интегралов квантовой электродинамики, основанные на понятии конечной части интеграла Римана—Вейля. Вычисления приводят к тем же результатам, что и другие методы. О. С. Парасюк

6676. **Добавочные границы, существующие у переходных функций различных типов цепей. Земанян** (Further bounds existing on the transient responses of various types of networks. Zemanian A. H.), Proc. I.R.E., 1955, 43, № 3, 322—326, 346 (англ.)

Доказываются и иллюстрируются примерами пять теорем, выражающих границы, между которыми расположены переходные функции некоторых типов линейных цепей с сосредоточенными параметрами. Предыдущие результаты того же характера опубликованы автором ранее (Zemanian A., Proc. I. R. E, 1954, 42, № 5, 835—839).

Первая из теорем относится к цепи, у которой вещественная часть $\mathrm{Re}\, Z(\omega) = R(\omega)$ передаточной функции $Z(s)$ при положительных вещественных частотах, монотонно убывает при возрастании ω. Теорема утверждает, что переходная функция $A(t)$ такой цепи, выражающая процесс воздействия единичной функции, не может превосходить 18% своего установившегося значения. Кроме того, время нарастания процесса на выходе системы, с момента времени приложения единичной функции до момента первого прохождения значения функции $A(t)$ через свое установившееся значение $A(\infty) = r$, не может быть меньше числа 1,22 $(r - K)C$, где K и C являются коэффициентами в разложении по убывающим степеням s функции $Z(s)$:

$$Z(s) = K + \frac{1}{Cs} + \ldots, \qquad (1)$$

имеющем место при достаточно больших $|s|$. Доказательство этой теоремы заключается в оценке функции $A(t)$, представленной в виде интеграла Фурье с синусом от функции $R(\omega)$.

Подобным образом остальные четыре теоремы утверждают, что при некоторых условиях, накладываемых на функцию $Z(\omega)$, переходные функции цепи соответствующим образом ограничены. При обозначении $Z(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ эти условия содержат требование неположительности или неотрицательнсти одной из функций $dR/d\omega$, $R(\omega)$ или $I(\omega)$. В качестве переходных функций здесь рассматриваются: импульсная характеристика $W(t)$, выражающая процесс при воздействии единичного импульса $\delta(t)$, и функции $B(t)$ и $C(t)$, выражающие процесс при воздействии функций, равных t соответственно t^2 при $t \geqslant 0$ и равных нулю при $t < 0$. Вышеуказанная ограниченность функций заключается в некоторых неравенствах, которым удовлетворяют эти функции, причем в неравенства входят некоторые коэффициенты разложения (1) и аналогичного разложения функции $Z(s)$ по положительным степеням s, имеющего место при достаточно малых $|s|$. Н. А. Бразма

6677. **Критическое изучение понятия групповой скорости. Котт** (Étude critique de la notion de vitesse de groupe. Cotte M.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1955, 62, № 7—8, 237—247 (франц.)

Если спектр сигнала занимает узкую полосу частот, то распространение сигнала можно представить в виде модулированной по амплитуде несущей волны краткой длительности. Скорость распространения несущей волны называется групповой скоростью. Статья содержит рассуждения об осложнениях при рассмотрении групповой скорости в случае, если спектр сигнала занимает широкую полосу частот. Применяется преобразование Фурье. Н. А. Бразма

6678. **Запаздывающие потенциалы динамики упругого тела. Аржаных И. С.,** Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, вып. 16, 5—22

6679 К. **Высшая математика для инженеров. Реддик, Миллер** (Advanced mathematics for engineers. Reddick Harry Wilfred, Miller Frederich Howell. 3rd ed. by F. H. Miller. New York, Wiley; London, Chapman and Hall, 1955, xiv, 548 p., ill., 52 sh.),Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 285, 9 (англ.)

6680 К. **Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов.** Изд. 5-е стереотип. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.,** М., Гостехиздат, 1955, 608 стр., илл., 14 р. 30 к.

См. также: 6498, 6501, 6508, 6565, 6603 К, 6702, 6722, 6840

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

6681. **Замечание к результату Калаби и Дворецкого. Шрейбер** (Tailpiece to a result by Calabi and Dvoretzky. Schreiber Shmuel), Riveon lematematika, 1954, 8, 30—31 (иврит; рез. англ.)

Теорема. Пусть $\{G_m\}$ — последовательность замкнутых выпуклых множеств в линейном нормированном пространстве, каждое из которых содержит начало и имеет диаметр $\leqslant 2$. Тогда существует последовательность элементов $\{p_m\}$ с p_m на границе G_m и $\|\Sigma_{m=1}^n p_m\| \leqslant 1$ для всех n.

Предложение, указанное в заглавии (Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 70, 177—194), таково, что если $, m = 1,2, \ldots,$ — треугольники в комплексной плоскости, то имеются вершины p_m с $|\Sigma_{m=1}^n p_m| \leqslant \sqrt{5}$ M. Jerison

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 5, 488.

6682. **Теоремы продолжения в нормированных векторных пространствах. Павел** (Teoreme de extensiune în spaţii vectoriale normate. Pavel Monica), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1955, 5, № 8, 1133—1138 (рум.; рез. русс., франц.)

Пусть E_1, E, F — банаховы пространства, $E_1 \subset E$, f — линейный ограниченный оператор, отображающий E_1 в F. Рассматриваются условия для E_1 и E (E_1 и E фиксированы, F — любое), а также для F (F фиксировано, E_1 и E — любые), при которых всякий f можно

расширить на E с сохранением нормы. Подобные условия известны (Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.— Л., 1950, 350—354). В статье и резюме к ней есть погрешности, затрудняющие понимание.
С. Н. Крачковский

6683. Вполне непрерывные возмущения операторов. Шмульян Ю. Л., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 1, 35—38

Рассматриваются линейные операторы, действующие в банаховом пространстве E. Пусть G — область комплексной плоскости, $A(\zeta)$ — регулярная в G операторная функция, принимающая при каждом $\zeta \in G$ вполне непрерывные значения; B_{λ_0} — множество таких $\zeta \in G$, что λ_0 ($\lambda_0 \neq 0$) является собственным числом $A(\zeta)$.

Устанавливается, что либо B_{λ_0} не имеет предельных точек в G, либо $B_{\lambda_0} = G$. Во втором случае существует такое число p, что инвариантное подпространство T_ζ оператора $A(\zeta)$, отвечающее значению λ_0, имеет размерность p для всех $\zeta \in G - F$, где F — изолированное в G множество точек ζ; при этом, если $\zeta \in F$, то $\dim T_\zeta > p$; элементарные делители оператора, индуцированного в T_ζ оператором $A(\zeta)$, совпадают для всех $\zeta \in G - F$.

Эти результаты, как утверждает автор, могут быть применены к изучению спектральных свойств оператора $A - K$, где K вполне непрерывен. Формулируются три относящихся сюда предложения. Два из них (лемма 3 и теорема 4) принадлежат С. М. Никольскому (Изв. АН СССР, сер. матем., 1943, 7, № 3, 147—166), третье (теорема 5) — И. Ц. Гохбергу (Докл. АН СССР, 1951, 78, № 4, 629—632).
С. Н. Крачковский

6684. Письмо в редакцию. Шмульян Ю., Докл. АН СССР, 1955, 104, № 6, 804

Отмечается, что основные результаты пп. 1 и 2 работы автора (реф. 6683) могут быть легко получены как следствия, например, результатов статьи И. Ц. Гохберга (Докл. АН СССР, 1951, 78, № 4, 629—632).

6685. Некоторые свойства нормально разрешимых операторов. Гохберг И. Ц., Докл. АН СССР, 1955, 104, № 1, 9—11

Пусть $A_\lambda = A - \lambda I$, где A — линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, I — тождественный оператор в H, λ — число. Обозначим через $K(A)$ множество комплексных λ, для каждого из которых существует такое натуральное число $r = r(\lambda)$, что: 1) операторы A_λ^i ($i = 1, 2, \ldots, r+1$) нормально разрешимы, 2) $\dim [L(A_\lambda^{r+1}) \ominus L(A_\lambda^r)] < \infty$, где L — множество нулей соответствующего оператора. Отсюда следует, как отмечается, нормальная разрешимость всех операторов A_λ^i ($i = 1, 2, \ldots$). Доказывается, что множество $K(A)$ открыто, и что если K — какая-либо его связная компонента, то для всех $\lambda \in K$, за исключением, может быть, изолированного множества P, уравнение $A_\lambda x = 0$ имеет одно и то же конечное число m линейно независимых решений (в частном случае, когда $m = 0$, оператор A_λ имеет ограниченный обратный слева). Если $\lambda \in K - P$, то $\dim L(A_\lambda^{n+1}) - \dim L(A_\lambda^n) = m$ ($n = 1, 2, \ldots$). Если $\lambda \in P$, то уравнение $A_\lambda x = 0$ имеет более m линейно независимых решений и существует число $n_0 = n_0(\lambda)$ такое, что $\dim [L(A_\lambda^{n+1}) \ominus L(A_\lambda^n)] = m$ для $n > n_0$.
С. Н. Крачковский

6686. Об одном характеристическом свойстве ядра линейного оператора. Гохберг И. Ц., Маркус А. С., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 5, 893—896

Пусть A — замкнутый линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E. Совокупность значений λ, для которых оператор $A_\lambda = A - \lambda I$ непрерывно обратим, есть открытое множество. Пусть Γ — одна из его связных компонент. Доказывается, что либо уравнение $A_\lambda x = y$ (y — заданный элемент, x — искомый) разрешимо при всех $\lambda \in \Gamma$, либо оно разрешимо только, может быть, для значений λ, образующих изолированное в Γ множество. Если имеет место первый случай, то при любом $\lambda \in \Gamma$ элемент y принадлежит ядру оператора A_λ, т. е. каждое из уравнений $A_\lambda^n x = y$ ($n = 1, 2, \ldots$) разрешимо. Наоборот, если при каком-либо фиксированном $\lambda \in \Gamma$ элемент y принадлежит ядру оператора A_λ, то имеет место первый случай. Аналогичные результаты формулируются для любого линейного ограниченного непрерывно обратимого оператора A_λ, зависящего аналитически от λ в некоторой области Γ комплексной плоскости. Принадлежность элемента y ядру оператора A_{λ_0} означает в этом случае существование последовательности элементов $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, удовлетворяющих равенствам $C_0 x_0 = y$, $C_0 x_n + C_1 x_{n-1} + \ldots + C_n x_0 = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), где C_ν — операторы, определяемые разложением $A_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^\nu C_\nu$.
С. Н. Крачковский

6687. О характеристическом свойстве ядра линейного оператора. Маркус А. С., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 6, 1144—1146

Результаты относительно разрешимости уравнения $(A - \lambda I)x = y$, полученные совместно И. Ц. Гохбергом и автором (реф. 6686), обобщаются на случай, когда нормально разрешимый оператор $A - \lambda I$ не является обратимым, но имеет конечное число линейно независимых нулей.
С. Н. Крачковский

6688. Нелинейные операторы в пространствах Орлича. Грибанов Ю. И., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, **115**, № 7, 5—13

Теорема Ф. Рисса о компактности семейств функций в L_p обобщается на случай пространств Орлича, определенных N'-функциями, удовлетворяющими Δ_2-условию. Остальные теоремы, относящиеся к нелинейным операторам, известны. Основные из них, как частный случай, содержатся в результатах Я. Б. Рутицкого (Доповіді АН УРСР, 1952, № 3, 161—166).

В теореме 6 рассматриваются компактные операторы $h: h\varphi(x) = f[x, \varphi(x)]$, действующие из одного пространства Орлича L_Φ^* в другое $L_{\Phi_1}^*$. Отметим, что из компактности оператора h следует, что он преобразует все пространство L_Φ^* в один элемент пространства $L_{\Phi_1}^*$.
М. А. Красносельский

6689. Исследование спектра и разложение по собственным элементам некоторых несамосопряженных операторов. Халилов З. И., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1955, № 1, 15—22 (рез. азерб.)

Устанавливается следующая теорема: Пусть A — произвольный самосопряженный оператор (вообще говоря, неограниченный), $R_\lambda B$ — вполне непрерывный оператор, $(E + R_\lambda B)^{-1}$ существует по крайней мере в одной невещественной точке M. Тогда невещественная часть спектра оператора $A + B$ в полуплоскости, содержащей точку M, состоит из множества, не более чем счетного и не имеющего невещественных точек сгущения.

В качестве иллюстрации приведен пример, рассмотренный И. М. Гельфандом (Успехи матем. наук, 1952, 7, № 6, 183—184).

Устанавливаются также некоторые условия, при которых имеет место полнота собственных и присоединенных элементов. М. С. Лившиц

Примечание редакции. Теорема 2 статьи является частным случаем теоремы, доказанной И. Ц. Гохбергом (Докл. АН СССР, 1951, **78**, № 4, 629—632).

6690. Некоторые достаточные условия открытости отображений в функциональных пространствах. Герчинский Р., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 2, 201—202

В предыдущей заметке (РЖМат, 1956, 5970) автор сформулировал теоремы о неявных функциях в терминах замкнутости и открытости операторов.

Пусть оператор $f(x)$ определен на некотором открытом множестве W банахова пространства B_1 и $f(x) \in B_2$. Предполагается, что $f(x)$ — замкнутый оператор и что прообраз произвольного элемента $y \in f(W)$ содержит только изолированные предельные точки. При этих условиях формулируется достаточный признак открытости оператора $f(x)$: должна существовать функция $\varphi(r, \alpha)$, не возрастающая при убывании r и непрерывная по α, такая, что: 1) $\varphi(r, \alpha) > 0$ для $r > 0$ и $\alpha > 0$; 2) для каждого $x \in W$, $h \in B_2$

$$\alpha - \sup_{\|t\| < r} \| f(x+t) - h \| > \varphi(r, \alpha), \text{ где } \alpha = \| f(x) - h \|.$$

(Вместо условия 2) можно требовать $\inf_{\|t\| < r} \| f(x+t) - h \| - \alpha > \varphi(r, \alpha)$).

Отмечены следствия этой теоремы:

1) Если $f(x) = x + Ax$, где A — сжимающий оператор, т. е. для любых $x, y \in W$ имеет место $\| Ax - Ay \| < \delta \| x - y \|$, $0 < \delta < 1$, то оператор $f(x)$ — сильно топологический на W (топологический и открытый).

2) Если $f(x) = x + Ax$ действует в гильбертовом пространстве, причем A вполне непрерывен, прообраз всякого $y \in f(W)$ содержит только изолированные предельные точки и выполняется одно из условий: — $(h, Ah) \geqslant (h, h)$ или $(Ah, Ah) \leqslant -(Ah, h)$, то оператор $f(x)$ является открытым.

Достаточные признаки открытости формулируются также в терминах производных Фреше от операторов. Д. П. Желобенко

6691. К вопросу об устойчивости критических значений четных функционалов. Борисович Ю. Г., Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 2, 165—168

Дается оценка количества критических точек функционала в банаховом пространстве E со счетным базисом, в котором норма элемента в некоторой степени α равномерно дифференцируема. Пусть T — единичный шар из E и $F(\varphi)$ ($\varphi \in T$) — слабо непрерывный равномерно дифференцируемый в T функционал. Точка φ_0 на T называется критической, если

$$\operatorname{grad} F(\varphi_0) = \lambda \operatorname{grad} \| \varphi_0 \|^{\alpha}. \qquad (1)$$

Формулируется теорема, дающая оценку снизу числа нормированных решений функционального уравнения (1). Если $F(\varphi) > 0$, $\| \operatorname{grad} F(\varphi) \| > 0$ при $\| \varphi \| > 0$, $F(0) = 0$, то для всякого натурального N существует $\delta > 0$ такое, что любой функционал $F(\varphi) + G(\varphi)$ имеет не меньше чем N критических точек, когда $\sup | G(\varphi) | + \sup \| \operatorname{grad} G(\varphi) \| < \delta$ при $\| \varphi \| \leqslant 1$. Это предложение применяется для оценки числа решений интегральных уравнений типа Лихтенштейна.

Изучаются условия, обеспечивающие устойчивость критических значений на гиперболоиде из гильбертова пространства в случае определенного возмущения четного функционала $F(\varphi)$.

При оценке критических значений функционала важную роль играют классы множеств, отличающиеся друг от друга некоторым инвариантом. Для построения аналогичных классов множеств вводится новое определение рода множеств и изучаются некоторые его свойства. Э. С. Цитланадзе

6692. О теореме Хеллингера-Хана. Ито (Hellinger-Hahn の定理について・伊藤清三), 數學 (Сугаку), 1953, **5**, № 2, 90—91 (япон.)

6693. Об одном уточнении теоремы Фреше — Романовского. Рутман М. А., Тр. Одесск. гидрометеорол. ин-та, 1955, № 7, 129—136

Ядро $K(x, s)$ называется стохастическим, если $K(x, s) \geqslant 0$ и $\int_a^b K(x, s)\, ds = 1$ ($a \leqslant x,\ s \leqslant b$). Фреше доказал (Fréchet M., Bull. Soc. math. France, 1934, **62**, 68—83), что все собственные числа стохастического ядра, по модулю равные единице, являются натуральными корнями из $1 : \lambda^n = 1$. Аналогичная теорема для матриц была установлена В. И. Романовским (Acta math., 1936, **66**, 147), для вполне непрерывных операторов Н. Н. Боголюбовым и референтом (Зб. праць Ін-ту матем. АН УРСР, 1946, **9**). Автор даст новое доказательство этих теорем и ряд уточнений, из которых укажем оценку для показателя $n : n \leqslant \max_{x,\, s} K(x, s)\,(b - a) - 1$.

С. Г. Крейн

6694. О среднем значении функционала. Полищук Е. М., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 179—186

Пусть функционал $F[x(t)]$ таков, что

$$F[x(t)] = \lim_{n \to \infty} \Phi_n(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n),$$

где $x_k^n = x(t_k^n)$, $t_1^n, t_2^n, \ldots, t_n^n$, $n = 1, 2, \ldots$ — последовательность разбиений сегмента $[0,1]$ такая, что $\lim_{n \to \infty} \max_i (t_{i+1}^n - t_i^n) = 0$, а Φ_n — последовательность ограниченных интегрируемых функций. В таком случае среднее значение функционала $F[x(t)]$ по области $a(t) \leqslant x(t) \leqslant b(t)$ определяется как предел средних значений функций $\Phi_n(x_1^n, \ldots, x_n^n)$ по n-мерным интервалам $a(t_k^n) \leqslant x_k^n \leqslant b(t_k^n)$, $k = 1, \ldots, n$; аналогично определяется и интеграл от $F[x(t)]$ по области $a(t) \leqslant x(t) \leqslant b(t)$. Доказывается, что для функционалов вида

$$F[x] = \int_0^1 \ldots \int_0^1 H(x(u_1), \ldots, x(u_p); u_1, \ldots, u_p)\, du_1 \ldots du_p, \qquad (1)$$

где H — ограниченная интегрируемая функция своих аргументов (а следовательно, и для функционалов, представимых в виде суммы равномерно сходящегося ряда из функционалов такого вида), среднее значение по области $a(t) \leqslant x(t) \leqslant b(t)$ всегда существует; дается явная формула, определяющая это среднее значение. Доказывается, что функционал вида (1) почти везде равен своему среднему значению (при естественном понимании выражения «почти везде»); доказательство этого предложения опирается на некоторые теоретико-вероятностные факты (теорему о законе больших чисел для слабо зависимых случайных величин). Устанавливаются некоторые результаты относительно интеграла от функционала (1) по области $a(t) \leqslant x(t) \leqslant b(t)$. Полученные результаты сопоставляются с некоторыми предложениями Гато и Леви (Lévy P., Les problèmes concrèts d'analyse fonctionnelle, Paris, 1951), касающимися среднего значения от подобных же функционалов по области функционального пространства, определяемой неравенством $\int_0^1 x^2(t)\, dt \leqslant R^2$. А. М. Яглом

6695. Среднее значение и интеграл от функционала. Полищук Е. М., Уч. зап. Ленингр. высш. инж.-мор. уч-ща, 1955, № 1, 135—146

Содержится более подробное изложение результатов другой заметки (реф. 6694). А. М. Яглом

6696. Рисово разложение на компоненты пространства оценок на структуре. Бауэр (Eine Rieszsche Bandzerlegung im Raum der Bewertungen eines Verbandes. Bauer Heinz), Sitzungsber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1953 (1954), 89—117 (нем.)

Автор обобщает понятие оценки на структуре (Биркгоф Г., Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952, 115. *Ред.*) и получает разложение таких оценок с помощью рисовых компонент (bands) полной векторной структуры (Bourbaki N., Eléments de mathématique, XIII, ч. I, кн. VI, гл. I — IV, Actualités sci. ind., № 1175, Paris, 1952, 17—40) (см. также Канторович Л., В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., Гостехиздат, 1950, *Ред.*). Пусть V — структура, в которой sup и inf обозначаются $\vee$ и $\wedge$ соответственно. Пусть W — полная векторная структура над упорядоченным полем K (предполагается, что упорядочение и операции в W согласованы с операциями в K). Функция f, заданная на V со значениями в W, называется оценкой, если $f(a \vee b) + f(a \wedge b) = f(a) + f(b)$ для любых $a,\ b \in V$. При заданном $c \in V$ множество Ψ_c всех оценок f, для которых $f(c) = 0$, представляет векторную структуру с естественным определением сложения и умножения на числа, где $f \leqslant g$ означает, что $g - f$ изотонна. Обычным путем вводится понятие относительно ограниченной вариации и доказывается, что множество Φ_c всех элементов из Ψ_c, имеющих относительно ограниченную вариацию, будет полной векторной структурой (см. Биркгоф Г., 127). Непрерывность оценки определяется обычным образом в терминах направленных систем элементов, связанных с каждым $s \in V$. Доказывается, что множество Φ_c^s всех непрерывных $f \in \Phi_c$ будет компонентой в Φ_c. С помощью теоремы Риса о компонентах и их дополнениях (Bourbaki N., цит. выше, 25—26) показывается, что каждая оценка $f \in \Phi_c$ может быть единственным образом представлена в виде суммы $f = f_s + f_u$, где f_s непрерывна, а f_u чисто разрывна в том смысле, что если g непрерывна и $|g| \leqslant |f_u|$, то $g = 0$. Специально изучаются вещественные оценки с двумя значениями и приводится ряд конкретных примеров. Среди последних рассматривается конечноаддитивная мера по алгебре множеств, для которой Иосида и референтом было введено понятие чисто разрывности и была доказана упомянутая теорема (Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 72, 46—66). E. Hewitt

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 50.

6697. О некоторых операторных уравнениях в полуупорядоченном пространстве, имеющих применение в теории устойчивости по Ляпунову. Рутман М. А., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 2, 217—220

Пусть E — вещественное линейное полуупорядоченное пространство; P — совокупность всех $x \in E$, для которых $x > \theta$, называемая конусом E. Последовательностью Коши называется последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in E$, для которой существует элемент $y_0 \in P$ такой, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что если $m,\ n \geqslant N$, то $-\varepsilon y_0 < x_m - x_n < \varepsilon y_0$. Предполагается, что E полно и что существует система линейных функционалов $\{f_\alpha(x)\}$ такая, что $x > \theta$ тогда и только тогда, когда $f_\alpha(x) \geqslant 0$ для всех α. Комплексное расширение $\widetilde{E}$ понимается как совокупность элементов вида $x = x_1 + ix_2$, $x_1, x_2 \in E$, а соотношение $-y < x_1 + ix_2 < y$, $x_1, x_2 \in E$, $y \in P$, понимается в том смысле, что $-y < x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi < y$ для любого φ. Линейный оператор S на $\widetilde{E}$ называется вольтерровым, если ряд $x + \lambda Sx + \lambda^2 S^2 x + \ldots$ сходится при всяком $x \in \widetilde{E}$ и любом комплексном λ. S называется монотонным, если из $x > y$ следует $Sx > Sy$. S_1 называется мажорантой для S_2, если $S_1 \pm S_2$ — монотонные операторы. Линейный оператор A называется ограниченным, если существует число $c > 0$ такое, что из $-y < x < y$, $x \in \widetilde{E}$, $y \in P$, следует $-cy < Ax < cy$.

Указываются формулы для единственных решений операторных уравнений вида: $y - SAy = x$, $y - S_1 S_2 \ldots S_n A y = x$, $y - S_1 A_1 y - \ldots - S_n A_n y = x$, где S_i — операторы, имеющие монотонные вольтерровы мажоранты, A_i — ограниченные операторы, причем S_i перестановочны между собой и с каждым из A_i. Эти решения находятся с помощью комплексного операторного интегрирования по некоторым замкнутым контурам. При помощи решений указанных уравнений находятся условия, достаточные для того, чтобы уравнения $y - SAy = x_0 + Sx_1$, $y - S_1 A_1 y - \ldots - S_n A_n y = x_0 + S_1 x_1 + \ldots + S_n x_n$ и некоторые другие имели ограниченные решения при всяких ограниченных элементах x_0, x_1 или соответственно $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Ограниченность $x \in \widetilde{E}$ понимается по отношению к некоторому элементу $\xi_0 \in P$ в том смысле, что существует число $t(x)$, для которого $-t\xi_0 < x < t\xi_0$. Д. Ф. Харазов

6698. Десять лет теории нормированных колец. Лорх (Normed rings — the first decade. Lorch E. R.), Proc. Sympos. Spectral Theory and Different. Probl., Stillwater, Oklahoma, 1955, 249—258 (англ.)

Обзор первоначальных работ по нормированным кольцам. В обзоре нашли отражение в частности работы: Nagumo M., Japan. J. Math., 1936, **13**, 61—80; Гельфанд И. М., Матем. сб., 1941, **9**, 3—24; Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Матем. сб., 1943, **12**, 197—213; Lorch E. R., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, **52**, 238—248; 1943, **54**, 414—425; Bull. Amer. Math. Soc., 1944, **50**, 447—463; Ambrose W., Trans. Amer. Math. Soc., 1945, **57**, 364—386; Шилов Г. Е., Матем. сб., 1947, **21**, 25—47. Новых результатов в обзоре нет. Г. Е. Шилов

6699. Унитарная эквивалентность бинормальных операторов. Браун (The unitary equivalence of binormal operators. Brown Arlen), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 2, 414—434 (англ.)

Кольцо $\mathfrak{R}$ называется бинормальным, если для любых $X_i \in \mathfrak{R}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ $\sum \pm X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3} X_{i_4} = 0$, где сумма берется по всем перестановкам $i_1 i_2 i_3 i_4$ чисел 1, 2, 3, 4 и знак $\pm$ берется в зависимости от четности или нечетности перестановки. Линейный ограниченный оператор A в гильбертовом пространстве называется бинормальным, если минимальное кольцо, содержащее A и A^*, бинормально. Изучается структура бинормального кольца $\mathfrak{R}$ операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Основной результат: Пространство $\mathcal{H}$ можно разложить в прямую сумму $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ двух взаимно ортогональных инвариантных относительно $\mathfrak{R}$ подпространств $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ (при этом в частных случаях может оказаться $\mathcal{H}_1 = (0)$ или $\mathcal{H}_2 = (0)$) так, что: 1) $\mathfrak{R}$ коммутативно в $\mathcal{H}_1$; 2) кольцо $\mathfrak{R}$, рассматриваемое только в $\mathcal{H}_2$, можно реализовать как кольцо $M_2(\mathfrak{X})$ матричных непрерывных функций $A = A(x)$ на бикомпактном хаусдорфовом пространстве $\mathfrak{X}$, где $A(x)$ — матрица второго порядка, и притом так, что A^* переходит в $(A(x))^*$ и $|A|$ — в $\sup_x |A(x)|$.

Этот результат применяется к исследованию унитарных инвариантов бинормального оператора. Для этого по данному оператору A строятся операторы $f_1(A) = [A, A^*]^2$, $f_2(A) = [A^2, A^*]^2$, $f_3(A) = ([A, A^*] + [A^2, A^*])^2$, $f_4(A) = (A[A, A^*])^2$, где вообще $[A, B] = AB - BA$.

Оказывается, что если A бинормален, то операторы $f_i(A)$, $i=1,\ldots,4$, нормальны и попарно перестановочны, и что два приведенных бинормальных оператора A_1, A_2 в $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изометрическое отображение W пространства $\mathcal{H}_1$ на $\mathcal{H}_2$ такое, что $W^{-1}f_i(A_2)W = f_i(A_1)$, $i=1,2,3,4$. При этом бинормальный оператор A в $\mathcal{H}$ называется приведенным, если в $\mathcal{H}$ не существует отличного от (0) подпространства, приводящего A, на котором A нормален.

В заключение полученные результаты применяются для получения теоремы Диксмье (Dixmier J., Rev. scient, 1948, 86, 387—389) об унитарных инвариантах пары операторов проектирования и, кроме того, обсуждаются возможности обобщения этих результатов на «n-нормальные» операторы. М. А. Наймарк

6700. О прямом произведении W^*-алгебр. Мисоноу (On the direct product of W^*-algebras. Misonou Yosinao), Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 2—3, 189—204 (англ.)

Прямое произведение $M_1 \times M_2$ двух W^*-алгебр (слабо замкнутых самосопряженных колец ограниченных операторов в гильбертовом пространстве) M_1, M_2 в гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ определяется как минимальное слабо замкнутое кольцо операторов в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ (прямом произведении пространств в смысле Меррея — Нёймана), порожденное всевозможными прямыми произведениями $A_1 \times A_2$ операторов $A_1 \in M_1$, $A_2 \in M_2$.

Основные результаты:

1. $M_1 \times M_2$ не зависит от пространств $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, в которых реализованы сомножители, так что, если W^*-алгебры M_1, M_2 в пространствах $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ изоморфны W^*-алгебрам N_1, N_2 в пространствах H_1, H_2, то $M_1 \times M_2$ изоморфно $N_1 \times N_2$.

2. Если $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — гильбертовы алгебры в гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, то их алгебраическое прямое произведение $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ есть гильбертова алгебра в $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ и $L(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2) = L(\mathfrak{A}_1) \times L(\mathfrak{A}_2)$, $R(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2) = R(\mathfrak{A}_1) \times R(\mathfrak{A}_2)$; при этом $L(\mathfrak{A})$, $R(\mathfrak{A})$ обозначают W^*-алгебры, порожденные операторами левого и правого умножений соответственно на элементы гильбертовой алгебры $\mathfrak{A}$.

3. Если M_1, M_2 — полуконечные W^*-алгебры, то $M_1' \times M_2' = (M_1 \times M_2)'$. Если, кроме того, M_1, M_2 —обе типа I, то $M_1 \times M_2$ — также типа I; если же одна из них типа II, то $M_1 \times M_2$ — алгебра типа II.

4. Если M_1, M_2 — конечные W^*-алгебры, то $M_1 \times M_2$ — конечная W^*-алгебра.

5. Если M_1, M_2 — аппроксимативно конечные факторы, то $M_1 \times M_2$ — также аппроксимативно конечный фактор.

6. Если M_1, M_2 — конечные факторы, то фундаментальная группа фактора $M_1 \times M_2$ содержит фундаментальные группы факторов M_1, M_2 в качестве своих подгрупп.

В статье имеются опечатки; повидимому, из-за опечаток непонятно неравенство в доказательстве теоремы 2 (строка 7 снизу на стр. 195) (утверждение, доказываемое при помощи этого неравенства, верно).

М. А. Наймарк

6701. О прямом произведении конечных факторов. Накамура (On the direct product of finite factors. Nakamura Masahiro), Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 2—3, 205—207 (англ.)

Доказывается, что если A, B, C — конечные факторы, то A есть прямое произведение факторов B и C в смысле Мисоноу (реф. 6700) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) все элементы кольца B перестановочны со всеми элементами кольца C; 2) слабо замкнутое кольцо, порожденное множеством $B \cup C$, совпадает с A.

Указывается, что в случае конечных факторов A, B, C условия 1), 2) эквивалентны следующим условиям Сикорского (Sikorski R., Fundam. math., 1952, 39, 211—228): 1′) A — слабо замкнутое кольцо, порожденное множеством $B \cup C$; 2′) для любых нормальных гомоморфизмов φ_B, φ_C колец B, C в произвольное слабо замкнутое кольцо (W^*-алгебру) D существует нормальный гомоморфизм φ_A кольца A в D, являющийся общим продолжением гомоморфизмов φ_B, φ_C. Автор указывает также, что ему не удалось выяснить соотношение между условиями 1), 2) и 1′), 2′) в общем случае. М. А. Наймарк

6702. Теория обращения и представления для преобразований Лапласа абстрактных функций. Руни (An inversion and representation theory for the Laplace integral of abstractly-valued functions. Rooney P. G.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 2, 190—209 (англ.)

Теория преобразования Лапласа абстрактных функций за последние годы по своей полноте приблизилась к классической теории преобразования Лапласа для числовых функций. Однако в ряде важных пунктов имеются значительные пробелы. В частности, не были известны условия для того, чтобы абстрактная функция могла быть представлена в виде интеграла Лапласа от функции из класса $B_p([0,\infty);\mathfrak{X})$ (обозначения из книги Э. Хилла, Функциональный анализ и полугруппы, М., 1951, гл. III и X).

Основная цель работы — восполнить этот пробел. Попутно автор получает несколько новых результатов в теории интегрирования абстрактных функций.

Основные теоремы:

I. Если $x(\alpha) \in B([0,\omega];\mathfrak{X})$ для любого $\omega > 0$ и $f(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\alpha} x(\alpha)\, d\alpha$ сходится равномерно для $\lambda > \gamma > 0$, то для $\tau > 0$ и $k > \gamma\tau$

$$\lim_{k\to\infty} \vec{L}_{k,\tau}[f(\lambda)] = x(\tau)$$

в каждой точке Лебега $\tau > 0$ функции $x(\alpha)$. Здесь

$$\vec{L}_{k,\tau}[f(\lambda)] = (ke^{2k}/\pi\tau)\int_0^{+\infty} \eta^{-1/2}\cos(2k\eta^{1/2})\, f[k(\eta+1)/\tau]\, d\eta.$$

II. Если 1) $\lambda^{-1}f(\lambda) \in B([\delta,\infty);\mathfrak{X})$ для всех $\delta > 0$;

2) $\psi(\xi) = \int_\xi^\infty \eta^{-1}\|f(\eta)\|\, d\eta = O(\xi^{-m})$ для $\xi \to \infty$, $m > 1/2$ и $\psi(\xi) = O(e^{\gamma/\xi})$, $\gamma > 0$, $\xi \to 0+$;

3) $e^{-\zeta\tau}L_{k,\tau}[f(\lambda)] \in B([0,\infty);\mathfrak{X})$ для $\zeta > \gamma_1$ и всех $k > k_0$, то

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty e^{-\zeta\tau}L_{k,\tau}[f(\lambda)]\, d\tau = f(\zeta)$$

в каждой точке Лебега $\zeta > \gamma_1$ функции $f(\lambda)$.

III. Пусть $\mathfrak{X}$ — рефлективное пространство Банаха. Тогда для того чтобы $f(\lambda)$ для $\lambda > 0$ почти всюду совпадала с интегралом Лапласа функции из $B_p([0,\infty);\mathfrak{X})$, $p > 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1) и 2) теоремы II с $m > 0$ при $\xi \to \infty$ и условие $\|L_{k,\tau}[e^{-\varepsilon\lambda}f(\lambda)]\|_p < M_p$, где M_p при фиксированных k, p от ε не зависит, $k > k_0$, $\varepsilon > 0$.

Аналогичная теорема доказывается для случая равномерно выпуклого пространства Банаха. В конце работы изучается представление для функций класса $H_p(\alpha;\mathfrak{X})$, $p \geqslant 1$ (Хилл Э., Определение 10.4.1). Б. М. Левитан

6703. Об одной теореме Ивасава. Мацусита (Über einen Satz von K. Iwasawa. Matsushita

Shin-ichi), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1953, A4, № 2, 59—61 (нем.)

Дается упрощенное доказательство следующей теоремы Ивасава: Пусть G — локально компактная группа с левочнвариантной мерой на ней и $L^{1,p}(G) = L^1(G) \cap L^p(G)$, где $p \geqslant 1$. $L^{1,p}(G)$ представляет собой нормированное кольцо с нормой $\max(\|x\|_1, \|x\|_p)$. Тогда совокупность всех непрерывных представлений $T(x)$ кольца $L^{1,p}(G)$ может быть изоморфно включена в совокупность всех непрерывных ограниченных представлений $D(g)$ группы G. При этом для каждого $T(x)$ существует единственное $D(g)$ такое, что $T(x) = \int_G x(g)\, D(g)\, dg$. С. В. Фомин

6704. **Эргодические теоремы. Ионеску-Тулча** (Teoreme ergodice. Ionescu Tulcea C. T.), Rev. Univ. «C. I. Parhon» şi Politehn. Bucureşti. Ser. ştiinţ. natur., 1954, № 4—5, 65—69 (рум.; рез. русс., франц.)

Доказываются некоторые эргодические свойства непрерывных унитарных представлений локально компактной абелевой группы G в группу унитарных операторов сепарабельного гильбертова пространства E. Эти теоремы обобщают на локально компактные абелевы группы теоремы Нёймана и Купмана для аддитивной группы действительных чисел. Резюме автора

6705. **Аналог формулы Планшереля для классических групп. Гельфанд И. М., Граев М. И.,** Тр. Моск. матем. о-ва, 1955, **4**, 375—404

Подробно излагается метод вывода формулы Планшереля для полупростых групп Ли, идея которого была опубликована ранее (РЖМат, 1954, 3246). Этим методом выводятся затем формулы Планшереля для комплексной унимодулярной группы, ортогональной и симплектической групп. М. А. Наймарк

6706. **Об одном общем методе вычисления следов бесконечномерных унитарных представлений вещественных простых групп Ли. Граев М. И.,** Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 3, 357—360

Дается новый метод вычисления следов неприводимых унитарных представлений вещественных простых групп, который сначала подробно излагается для случая дискретной серии представлений вещественной унимодулярной группы $\mathfrak{A}_2$ второго порядка; затем указывается, как этот метод обобщается на другие вещественные группы.

В случае группы $\mathfrak{A}_2$ рассматривается совокупность $\mathfrak{A}$ матриц $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, для которых преобразование $z \to \frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}$ переводит область $\Omega : z\bar{z} < 1$ в область Ω_g, замыкание которой лежит внутри Ω. Оказывается, что если $g \in \mathfrak{A}$, то оператор

$$T_g f(z) = f\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right)(g_{12}z + g_{22})^{-n}$$

имеет след $S(T_g)$, который можно непосредственно вычислить при помощи ортогонального базиса из функций $\psi_m = z^m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

След оператора представления получается из $S(T_g)$ предельным переходом, когда g, оставаясь в Ω, стремится к элементу $g_0 \in \mathfrak{A}$. М. А. Наймарк

6707. **Распределения, определенные с точки зрения приложений математики. I. Фундаментальные последовательности. Распределения, определенные фундаментальными последовательностями. II. Производные и интегралы, преобразование Лапласа. Коревар** (Distributions defined from the point of view of applied mathematics. I. Fundamental sequences. Distributions defined by fundamental sequences. II. Derivatives and antiderivatives. Laplace transformation. Korevaar Jacob), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 3, 368—378, 379—389; Indagationes math., 1955, **17**, № 3, 368—378, 379—389 (англ.)

Распределение на полупрямой $t \geqslant 0$ определяется как «предел» фундаментальной последовательности $\{f_n(t)\}$ $(n = 1,2,\ldots)$ интегрируемых функций. При этом последовательность интегрируемых функций $f_n(t)$ называется фундаментальной, если для любого $A > 0$ найдется целое число p такое, что последовательность

$$f_n^{(-p)}(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{p-1}} f_n(t_p)\, dt_p$$

равномерно сходится на $[0, A]$. Автор считает такое определение распределений более близким к обычным представлениям физиков о δ-функции и других сингулярных функциях. Определяются равенство двух распределений, простейшие действия над ними (сумма, сдвиг), а также понятия производной, порядка и преобразования Лапласа от распределения. Автор предполагает доказать в дальнейшем, что введенные им распределения совпадают с распределениями Шварца на полупрямой. Я. И. Житомирский

Примечание редакции. Автор, повидимому, не знаком с работой С. Л. Соболева (Матем. сб., 1935, **1**, 39—71), где было впервые введено понятие обобщенной функции, по существу весьма близкое к позднейшему определению Шварца.

6708. **Распределения, определенные фундаментальными последовательностями. III. Сходимость. Свертка. Определенный интеграл. Формулы обращения для преобразования Лапласа. IV. Умножение и деление. Замена переменных. Коревар** (Distributions defined by fundamental sequences. III. Convergence. Convolution. Definite integral. Inverse Laplace transformation. Multiplication and division. Substitution. Korevaar Jacob), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 4, 483—503; Indagationes math., 1955, **17**, № 4, 483—503 (англ.)

На основе данного автором определения распределения (реф. 6707) рассматриваются вопросы, указанные в заглавии. Устанавливаются некоторые свойства этих распределений, вполне аналогичные соответствующим теоремам Шварца (Schwartz L., Théorie des distributions, t. I. II). Новых результатов работа не содержит. Я. И. Житомирский

6709. **Умножение и замена переменных в теории распределений. Кёниг** (Multiplikation und Variablentransformation in der Theorie der Distributionen. König Heinz), Arch. Math., 1955, **6**, № 5, 391—396 (нем.)

Пусть $E = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ — линейное пространство, содержащее в качестве подпространства пространство $F = \{f, g, \ldots\}$ всех непрерывных действительных функций одного действительного переменного и удовлетворяющее следующим условиям:

I. Определено линейное отображение $\alpha \to \alpha'$ пространства E в себя, называемое дифференцированием, причем если $f \in F$ дифференцируема в обычном смысле, то f' совпадает с обычной производной.

II. Определено билинейное отображение $(\alpha, \beta) \to \alpha \circ \beta$ подмножества $\mathfrak{M} \subset E \times E$ в E, называемое умножением, причем а) для $f, g \in F$ $(f, g) \in \mathfrak{M}$ и $f \circ g$ совпадает с обычным произведением fg; б) для бесконечно дифференцируемой в обычном смысле функции $f \in F$ и произвольного $\alpha \in E$ $(f, \alpha) \in \mathfrak{M}$, в частности $1 \circ \alpha = \alpha$; в) если $f \in F$ — бесконечно дифференцируемая функция и $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{M}$, то $(f \circ \alpha, \beta)$, $(\alpha, f \circ \beta) \in \mathfrak{M}$; г) если выпол-

нено одно из соотношений $(\alpha', \beta) \in \mathfrak{M}$, $(\alpha, \beta') \in \mathfrak{M}$, то выполнено и второе, и $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{M}$; д) при выполнении всех перечисленных в г) соотношений $(\alpha \circ \beta)' = \alpha' \circ \beta + \alpha \circ \beta'$.

III. Каждое взаимно однозначное, бесконечно дифференцируемое вместе со своим обратным отображение $x \to \Phi(x)$ действительной прямой на себя индуцирует взаимно однозначное линейное отображение $\alpha \to \overline{\Phi}\alpha$ E на себя, причем а) для $f \in F$ $\overline{\Phi}f$ совпадает с обычной заменой переменных $(\overline{\Phi}f)(x) = f(\Phi(x))$; б) из $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{M}$ следует $(\overline{\Phi}\alpha, \overline{\Phi}\beta) \in \mathfrak{M}$ и $\overline{\Phi}(\alpha \circ \beta) = \overline{\Phi}\alpha \circ \overline{\Phi}\beta$: в) для произвольного $\alpha \in E$ $(\overline{\Phi}\alpha)' = \Phi' \circ \overline{\Phi}\alpha'$.

Свойствам I — III удовлетворяет пространство распределений Шварца, а также пространство обобщенных распределений Кёнига (РЖМат, 1953, 649). Доказывается теорема: В пространстве E не существует отличного от нуля элемента ξ, одновременно удовлетворяющего соотношениям $(f'', \xi) \in \mathfrak{M}$ для всех $f \in F$ и $x \circ \xi = 0$. Я. И. Житомирский

6710. Преобразования Фурье инвариантных распределений. Мете (Transformées de Fourier de distributions invariantes. Méthée Pierre-Denis). C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 11, 1179—1181 (франц.)

В предыдущей работе (РЖМат, 1956, 5360) автор указал общий вид распределений, инвариантных относительно группы вращений Лоренца. В реферируемой заметке указывается метод, позволяющий строить преобразования Фурье этих распределений. В частности, заново получаются преобразования Фурье инвариантных распределений Z М. Рисса — Шварца (Riesz M., Acta math., 1949, 81, 1—223; Schwartz L., Théorie des distributions, t. I, Paris, 1950). В. М. Борок

6711. Преобразования Фурье инвариантных распределений. II. Мете (Transformées de Fourier de distributions invariantes. II. Méthée Pierre-Denis), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 11, 684—686 (франц.)

Продолжение и дополнение предыдущей работы автора (реф. 6710). Записываются формулы преобразования Фурье распределений, инвариантных относительно группы вращений Лоренца. В. М. Борок

6712. Банаховы пространства обобщенных функций. Маринеску (Spaţii Banach de distribuţii. Marinescu G.), Rev. Univ. «C. I. Parhon» şi Politehn. Bucureşti. Ser. ştiinţ. natur., 1955, № 8, 6—13 (рум.; рез. русс., франц.)

Строится нормированное пространство Σ, состоящее из всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ на оси $-\infty < x < \infty$, за исключением точки $x = 0$, с равномерно ограниченными производными, с нормой $\|\varphi\| = \sup_{x,\, q} |\varphi^{(q)}(x)|$ (пример $\varphi(x) = e^{-\varepsilon|x|}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$). Автор называет обобщенными функциями линейные непрерывные функционалы на этом пространстве; таким образом, обобщенные функции сами образуют нормированное пространство.

Применения к дифференциальным уравнениям, предлагаемые автором, видимо, основаны на недоразумении, поскольку используемая им формула $(T', \varphi) = -(T, \varphi')$ в рамках его схемы лишена смысла. (Автор не указывает, требует ли он непрерывности самих основных функций при $x = 0$. Если эта непрерывность требуется, то $\varphi' \notin \Sigma$; если же непрерывности не требуется, то, например, производная от постоянной не будет равна нулю). Г. Е. Шилов

6713. К теории нелинейных релятивистски инвариантных уравнений. Соколик Г. А., Докл. АН СССР, 1955, 101, № 5, 817—820

Линейное уравнение

$$-i(\Box - \varkappa^2)(\delta z/\delta J) + \lambda(\delta^2 z/\delta J^2) - Jz = 0 \qquad (1)$$

для функционала z от источников $J(x)$ скалярного мезонного поля ($\varkappa$ — масса мезона) можно переписать в матричной форме

$$\Gamma(\delta\Psi/\delta J) - J\Psi = 0, \qquad (2)$$

где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -i(\Box - \varkappa^2) & \lambda \\ J & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} z \\ \delta z/\delta J \end{pmatrix}.$$

Так как уравнение (1) равносильно нелинейному уравнению $(\Box - \varkappa^2)\varphi + \lambda\varphi^2 = J$ для оператора поля $\varphi(x)$ (РЖМат, 1955, 2707), то из (2) делается вывод, что нелинейность можно толковать как новую степень свободы, связанную с источниками $J(x)$. В общем случае размерность пространства функций в (2) определяется порядком нелинейности.

Аналогичным образом можно рассмотреть уравнения для бозе-частиц произвольного спина ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$)

$$L^i_{\alpha\beta}\frac{\partial\psi_\beta}{\partial x_i} + i\varkappa\psi_\alpha + \lambda\sum_{ik} T^\alpha_{ik}\psi_i\psi_k = \eta_\alpha, \qquad (3)$$

где индекс α относится к неприводимым компонентам представления, определяемого уравнением $(L_i\partial/\partial x_i + i\varkappa)\psi = 0$; коэффициенты T^α_{ik} обеспечивают инвариантность уравнения (3) относительно преобразований группы Лоренца.

Переписывая в матричной форме уравнение (3), можно получить общий вид релятивистски инвариантного билинейного уравнения для бозе-поля

$$\Gamma^\alpha_k(\delta\psi^{(\alpha)}/\delta\eta_k) - \eta_\alpha\Psi^{(\alpha)} = 0, \qquad (4)$$

если ввести матрицу $\Gamma^\alpha_k = \|a_{lm}\|^n_{l,\,m=0}$ с $a_{00} = -i(L_i\partial/\partial x_i + i\varkappa)$, $a_{0m} = \lambda\delta_{mk}$ при $m \geqslant 1$, $a_{l0} = T^\alpha_{lk}\eta_\alpha$ при $l \geqslant 1$, $a_{lm} = 0$ при $l, m \geqslant 1$, и $\Psi^{(\alpha)} = \|b_{l0}\|^n_{l=0}$ с $b_{00} = z$ и $b_{l0} = \sum_{k=1}^n T^\alpha_{lk}(\delta z/\delta\eta_k)$ при $l \geqslant 1$. Из условия инвариантности относительно преобразований Лоренца следует, что матрица Γ^α_i должна удовлетворять соотношению $[\Gamma^\alpha_i, I^{lm}] = g_{il}\Gamma^\alpha_m - g_{im}\Gamma^\alpha_l$ (Гельфанд И. М., Яглом А. М., Ж. эксперим. и теор. физики, 1948, 18, 703).

Таким же путем можно находить другие релятивистски инвариантные нелинейные уравнения для бозе-полей, в которых нелинейность интерпретируется как некоторое свойство пространства представления группы Лоренца. Уравнение (4) можно привести к виду, аналогичному уравнению с оператором массы типа Пайса. Ю. В. Новожилов

6714. К теории умножения причинных сингулярных функций. Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С., Докл. АН СССР, 1955, 100, № 1, 25—28

Дается анализ произвола, возникающего в членах матрицы рассеяния при формальном представлении последних через произведения причинных сингулярных функций. Показывается, что можно так распорядиться этим произволом (построить операцию $R(G)$), чтобы результат оказался эквивалентным обычному вычитательному формализму. Для $R(G)$ приведен рецепт построения и получена итерационная формула, соответствующая (на языке диаграмм Фейнмана) включению одной новой внутренней линии. Д. В. Ширков

6715. О вычитательном формализме при умножении причинных сингулярных функций. Боголюбов

Н. Н., Парасюк О. С., Докл. АН СССР, 1955, 100, № 3, 429—432

На основе результатов предыдущей работы (реф. 6714) получены две теоремы, из которых вытекает, что после применения операции $R(G)$ к отдельным членам разложения матрицы рассеяния, получаются выражения, не содержащие бесконечностей, причем соответствующие функции в импульсном представлении оказываются аналитическими в области достаточно малых импульсов. Этот результат является строгим обоснованием процедуры устранения бесконечностей из отдельных членов разложения матрицы рассеяния по степеням взаимодействия, сформулированной Дайсоном (Dyson F. J., Phys. Rev., 1949, 75, 1736) и Саламом (Salam A., Phys. Rev., 1951, 82, 217).

Д. В. Ширков

6716. К теории причинных сингулярных функций. Парасюк О. С., Докл. АН СССР, 1955, 100, № 4, 643—645

Реферируемая заметка примыкает по своему содержанию к предыдущим статьям Н. Н. Боголюбова и автора (реф. 6714, 6715).

Доказывается теорема о том, что выражение

$$\int \{\Pi_l \mathrm{reg}\, \Delta_l^c (x_r - x_s)\}\, F(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \qquad (1)$$

сходится к пределу при снятии регуляризации при условии, что $F(x_1, \ldots, x_n)$ — любая достаточно гладкая функция, достаточно быстро убывающая на бесконечности и обращающаяся в нуль при совпадении аргументов; здесь $\Delta_l^c (x_r - x_s)$ обозначает причинную функцию. Таким образом, предел выражения (1) определяет произведение причинных функций при несовпадающих аргументах. Доопределение этого произведения осуществлено в указанных выше работах.

Ю. А. Митропольский

6717 К. Продолжения преобразований гильбертова пространства с выходом из этого пространства. Надь (Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace. Sz.-Nagy Béla. Appendice au livre «Leçons d'analyse fonctionnelle» par F. Riesz et B. Sz.-Nagy. Budapest, Acad. Kiado, 1955, 36 p.) (франц.)

Излагается теория расширений операторов в гильбертовом пространстве с выходом из этого пространства. Основную роль в изложении играет теорема о представлениях *-полугрупп. При этом *-полугруппой автор называет полугруппу с единичным элементом ε, в которой введена операция $\xi \to \xi^*$, удовлетворяющая условиям: $\xi^{**} = \xi$, $(\xi\eta)^* = \eta^* \xi^*$; частным случаем *-полугруппы является группа, если положить в ней $\xi^* = \xi^{-1}$. Представлением полугруппы Γ называется соответствие $\xi \to D_\xi$, где D_ξ — ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, удовлетворяющее условиям: $D_\varepsilon = 1$, $D_{\xi\eta} = D_\xi D_\eta$, $D_{\xi^*} = D_\xi^*$.

Упомянутая выше теорема состоит в следующем: Пусть каждому элементу ξ *-полугруппы Γ поставлен в соответствие ограниченный линейный оператор T_ξ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ так, что выполнены условия: 1) $T_\varepsilon = 1$, $T_{\xi^*} = T_\xi^*$; 2) $\Sigma_\xi \Sigma_\eta (T_{\xi^*\eta} g_\eta, g_\xi) \geqslant 0$ для всех вектор-функций g_ξ, $\xi \in \Gamma$ со значениями из $\mathfrak{H}$, принимающих только конечное число отличных от нуля значений; 3) для всех таких вектор-функций g_ξ и всех $\alpha \in \Gamma$ $\Sigma_\xi \Sigma_\eta (T_{\xi^*\alpha^*\alpha\eta} g_\eta, g_\xi) \leqslant C_\alpha^2 \Sigma_\xi \Sigma_\eta (T_{\xi^*\eta} g_\eta, g_\xi)$, где C_α — некоторая постоянная. Тогда в некотором гильбертовом пространстве $H \supset \mathfrak{H}$ существует представление D_ξ *-полугруппы Γ такое, что $T_\xi f = P D_\xi f$ для всех $f \in \mathfrak{H}$, где P — оператор проектирования в H на $\mathfrak{H}$. Если H порождено элементами $D_\xi f$, $f \in \mathfrak{H}$ и $\xi \in \Gamma$, то $\{H, D_\xi, \mathfrak{H}\}$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма и имеют место следующие предложения: 1) $\|D_\alpha\| < C_\alpha$; 2) если $T_{\xi\alpha\eta} = T_{\xi\beta\eta} + T_{\xi\gamma\eta}$ при фиксированных $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ и произвольных $\xi, \eta \in \Gamma$, то $D_\alpha = D_\beta + D_\gamma$; 3) если $T_{\xi\alpha_n\eta} \to T_{\xi\alpha\eta}$, $n \to \infty$ при всех $\xi, \eta \in \Gamma$ и если $\overline{\lim} C_{\alpha_n} < \infty$, то $D_{\alpha_n} \to D_\alpha$.

Повидимому, автору осталась неизвестной статья референта (Изв. АН СССР, сер. матем, 1943, 7, 237—244), где тот же результат и тот же метод доказательства изложены для случая группы. Следует, однако, отметить, что переход от группы к полугруппе оказывается полезным для различных приложений. Из основной теоремы автор выводит ряд результатов референта (Изв. АН СССР, сер. матем, 1940, 4, 277—318), в частности, теорему о представлениях всякого обобщенного разложения единицы $B(\lambda)$ в виде $B(\lambda) = PE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — ортогональное разложение единицы. Кроме того, из той же теоремы о представлениях *-полугрупп выводятся другие в основном известные результаты, в том числе теоремы автора об операторной проблеме моментов и о нерастягивающих операторах, которые ранее были им получены из указанной выше теоремы референта (РЖМат, 1954, 2626, 4478).

Следует отметить, что конструкции на стр. 5 и 11 книги, приписываемые автором Майклу (E. A. Michael) и Халмошу (Halmos P. R., Summa Brasiliensis Math., 1950, 2, 125-134), имеются в более ранних работах референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1940, 4, 53—104, 277—318).

М. А. Наймарк

6718 Д. О методе функционального интегрирования в теории функций Грина. Свидзинский А. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем н., Львовск. ун-т, Львов, 1955

См. также: 6394, 6416, 6434, 6496, 6504 К, 6583, 6593, 6595, 6742

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

6719. О характеризации нормального закона. Бакстер (On a characterization of the normal law. Baxter Glen), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1955, 41, № 6, 383—385 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $X_1 \neq 0$ и X_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины и существуют два вещественных числа a и b таких, что $0 < a \leqslant b < 1$, $a^2 + b^2 = 1$ и $aX_1 + bX_2$ имеет то же самое распределение, что и X_1, тогда X_1 имеет нормальное распределение и $EX_1 = 0$. Приведенная теорема является частным случаем более общей теоремы, доказанной Ю. В. Линником (Линник Ю. В., Докл. АН СССР, 1952, 83, 353—355).

В. П. Скитович

6720. Заметка о распределении определенных квадратичных форм. Пачарес (Note on the distribution of a definite quadratic form. Pachares James), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 1, 128—131 (англ.)

В работе рассматриваются положительно определенные квадратичные формы от независимых случайных

величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ вида $Q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2$. Доказывается следующая теорема:

Пусть $Q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2$, причем все $a_i > 0$. $Q_n^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1} X_i^2$; все случайные величины X_i распределены нормально $EX_i = 0$ и $EX_i^2 = 1$. Тогда

а) $$P\{Q_n \leqslant t\} = F_n(t) = \frac{t^{n/2}}{(a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = \frac{E(Q_n^*)^k}{\Gamma(n/2 + k + 1)}.$$

в) Ряд для $F_n(t)$ сходится абсолютно.

с) Для любых двух целых и неотрицательных чисел r и s при $t > 0$ $F_n(t)$ не менее суммы $2r+2$ первых членов ряда а) и не более суммы $2s+1$ первых членов этого ряда.

Аналогичный результат приводится для форм вида $S_r = \frac{1}{2}(a_1\chi^2_{m_1} + \ldots + a_r\chi^2_{m_r})$, где $\chi^2_{m_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ независимые случайные величины, имеющие χ^2-распределение с m_i степенями свободы. В. П. Скитович

6721. О точных оценках в предельных теоремах. Петров В. В., Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 2, 180—182

Уточняются результаты работы Ю. В. Линника (Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, **11**, 111) о точности предельного соотношения в центральной предельной теореме. Уточнение идет в направлении ослабления условий, при которых доказаны теоремы Ю. В. Линника, и носящих там излишне ограничительный характер. Н. А. Сапогов

6722. Уточнение одной вероятностной предельной теоремы и ее применение к функциям Бесселя. Фиш (Refinement of a probability limit theorem and its application to Bessel functions. Fisz M.), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, **6**, № 1—2, 199—202 (англ.; рез. русс.)

Пусть целочисленные независимые величины X_1 и X_2 распределены по закону Пуассона с параметрами, соответственно, w_1 и w_2. При условии $w_i = nd_i \to \infty$, $d_i > 0$ — некоторые постоянные, $i = 1, 2$, выписывается асимптотическое разложение вероятности $P\{X_1 - X_2 = k\}$ по функциям Чебышева-Эрмита, из которого выводится, затем, асимптотическое разложение для функций Бесселя порядка k с чисто мнимым аргументом также по функциям Чебышева-Эрмита. Н. А. Сапогов

6723. О проекциях распределений вероятностей. Гилберт (Projections of probability distributions. Gilbert Walter M.), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, **6**, № 1—2, 195—198 (англ.; рез. русс.)

В связи с теоремой Крамера-Волда об одномерных проекциях n-мерных распределений доказывается следующее:

I. Если для моментов двумерного распределения $F(x_1, x_2)$ проблема моментов определенная, то распределение $F(x_1, x_2)$ однозначно восстанавливается по его проекциям на любое бесконечное множество различных прямых, проходящих через начало координат.

II. Если характеристические функции проекций двумерного распределения $F(x_1, x_2)$ на две непараллельные прямые аналитичны в окрестности начала координат, то характеристические функции всех других проекций и самого распределения $F(x_1, x_2)$ также аналитичны в окрестности начала координат.

Приводится пример двумерного распределения, не восстанавливаемого по его проекциям на некоторое множество (бесконечное) различных прямых, проходящих через начало координат. Н. А. Сапогов

6724. Распределение вероятностей в одном частном случае зависимых испытаний. Дивеев Р. Х., Докл. АН УзССР, 1955, № 7, 3—5 (рез. узб.)

Рассматривается последовательность испытаний такая, что вероятность положительного исхода при любом испытании зависит только от числа положительных исходов во всех предыдущих испытаниях.

Выводится формула для вероятности P_{nm} числа m положительных исходов за n испытаний.

Решение этой задачи более сложным способом имеется в статье Вудбери (Woodbury M., Ann. Math. Statistics, 1949, **20**, № 2), но в полученной там формуле содержится ошибка. В. А. Волконский

6725. О предельных распределениях, определяемых стохастическими уравнениями с бесконечным множеством нулей дисперсионной функции. Гинзбург Г. М., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 3, 441—444

Пусть $P_n(y, t)$ — функция распределения, определяемая стохастическим уравнением

$$\Delta y_i = A(y_i)\,\Delta t_i + f(\alpha, y_i)\sqrt{\Delta t_i},$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \sum_{0}^{n-1} \Delta t_i = t.$$

Обобщаются результаты о единственности предельного распределения

$$P(y) = \lim_{t\to\infty} [\lim_{n\to\infty} P_n(y, t)],$$

полученные ранее автором (Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, **15**, 563), на тот случай, когда дисперсионная функция $B(y) = Mf^2(\alpha, y)$ имеет бесконечно много нулей. Приведены соответствующие примеры. И. И. Гихман

6726. О дифференциальном уравнении процесса чистого размножения в теории вероятностей. Моргенштерн (Über die Differentialgleichung des reinen Geburtsprozesses in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Morgenstern Dietrich), Math. Nachr., 1955, **13**, № 1—2, 57—58 (нем.)

Процессом чистого размножения называется марковский процесс со счетным числом состояний, для которого вероятности $P_n(t)$ находиться в момент t в n-ом состоянии задаются дифференциальными уравнениями

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t), \quad P_n'(t) = -\lambda_n P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t),$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

где λ_n — некоторые постоянные. Известно, что эта система уравнений имеет единственное решение с $\sum_{i=0}^{\infty} P_i(t) \equiv 1$ при любых начальных условиях $P_i(0)$, где $\sum_{i=0}^{\infty} P_i(0) = 1$, если (и только если) $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i = \infty$.

Однако элементарное доказательство этого факта, данное Феллером (Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., 1953), оказалось неверным. В связи с этим автор дает такое доказательство, основанное на преобразовании Лапласа. Совсем простое доказательство этого факта дано В. Золотаревым (см. примечание к стр. 382 русского перевода указанной книги). Автор не отмечает, что интересующий нас факт является также следствием общей теории Феллера

(Feller W., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 48, 488; Добрушин Р. Л., Успехи матем. наук, 1952, 7, № 6, 185). Р. Л. Добрушин

6727. **Оптимальная линейная фильтрация нестационарных временных рядов. Кошман, Трюксал** (Optimum linear filtering of nonstationary time series. Koschmann A. H., Truxal J. G.), Proc. Nat. Electronics Confer., 1954, 10, 119—127 (англ.)

Рассматривается задача о фильтрации нестационарных случайных процессов с нулевыми средними значениями и известными корреляционными функциями, т. е. задача о наиболее точном (в смысле метода наименьших квадратов) восстановлении процесса $s(t)$ (с корреляционной функцией $R_{ss}(\tau, t)$) по наблюденным на интервале $[0, T]$ значениям процесса $x(t) = s(t) + n(t)$, где $n(t)$ — некоррелированный с $s(t)$ процесс с корреляционной функцией $R_{nn}(\tau, t)$. Для решения этой задачи предлагается использовать разложение процессов $s(t)$, $n(t)$ и $x(t)$ по какой-либо полной ортонормированной системе функций на интервале $[0, T]$, после чего задача сводится к решению бесконечной системы линейных уравнений. Наиболее удобным оказывается использовать одну из следующих двух ортонормированных систем: или систему нормированных собственных функций интегрального уравнения с ядром $R_{xx}(\tau, t) = R_{ss}(\tau, t) + R_{nn}(\tau, t)$ [в этом случае получаемая бесконечная система линейных уравнений распадается на бесконечное число линейных уравнений относительно отдельных неизвестных, так что решение здесь может быть немедленно записано в явном виде (этот результат был ранее получен Дейвисом (Davis R. C., J. Appl. Phys., 1952, 23, № 9, 1047—1053); см. также РЖМат, 1953, 830], или же систему собственных функций интегрального уравнения с ядром $R_{ss}(\tau, t)$, [в этом случае, повидимому, приближенная фильтрация, использующая лишь первые n членов разложения будет более точной, чем в любом другом случае]. А. М. Яглом

6728 К. **Избранные статьи по статистике и теории вероятностей. Вальд** (Selected papers in statistics and probability. Wald Abraham. New York etc., London, McGraw—Hill, 1955, ix, 702 pp., ill. 60 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 285, 9 (англ.)

6729 К. **Случайность и выбор в колоде карт и на шахматной доске: знакомство с теорией вероятностей на практике наглядным способом. Хогбен** (Chance and choice by cardpack and chessboard, an introduction to probability in practice by visual aids. Vol. 2. Hogben Lancelot. London, Parrish, 1955, 418—917 pp., ill., 70 sh), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 281, 9 (англ.)

6730 К. **Общедоступная математическая теория бриджа. 134 таблицы вероятностей и способы их употребления, простейшие формулы, приложения. Около 4000 вероятностей. Борель, Шерон** (Théorie mathématique du bridge à la portée de tous. 134 tableaux de probabilités avec leurs modes d'emploi, formules simples, applications. Environ 4000 probabilités. 2e éd. rev. et corr. Borel Emile, Chéron André. Paris — Gauthier — Villars, 1955, XVIII, 424 p. 2200.— fr. fr.), Schweiz. Buch, 1955, A 55, № 20, 501 (франц.)

6731 К. **Элементы теории вероятностей и некоторые ее приложения. Крамер** (The elements of probability theory and some of its applications; transl. from the Swedish. Cramér Carl Harald. New York, Wiley; Stockholm, Almqvist and Wiksell; London, Chapman and Hall. 1955, 281 pp., ill., 56 sh.). Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 285, 9 (англ.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

6732. **О предельном распределении отношения двух эмпирических распределений. Ван Шоужэнь** (王壽仁 (王寿仁), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1955. 5, № 2, 253—267 (кит.; рез. англ.)

Определяются предельные распределения при n и $m \to \infty$ следующих статистик:

$$\sqrt{n} \sup_{0<a\leqslant F(x)} F_n(x) - F(x)/F(x) \text{ (РЖМат, 1955, 3314) и}$$

$$\sqrt{nm/(n+m)} \sup_{0<a\leqslant T_n(x)} S_m(x) - T_n(x)/T_n(x),$$

где $F_n(x)$, $S_m(x)$, $T_n(x)$ — эмпирические функции распределения, построенные по результатам наблюдений над случайной величиной с функцией распределения $F(x)$. Использован метод, примененный Феллером для доказательства теоремы Колмогорова о предельном распределении $\sqrt{n} \sup_{-\infty<x<+\infty} |F_n(x) - F(x)|$ (Feller W., Ann. Math. Statistics, 1948, 19, 177—180). В. С. Королюк

6733. **Урновые модели корреляции и сравнение с многомерным нормальным интегралом. Мак Фаддей** (Urn models of correlation and a comparison with the multivariate normal integral. Mc Fadden J. A.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 3, 478—489 (англ.)

Каждая из случайных величин $x_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ может с равной вероятностью принимать только значения $+1$ и -1, и $M(x_i x_j) = r$, $i \neq j$. Находится вероятность P_n того, что все n величин положительны

$$P_n = ([1-r]/2r)/([1-r]/r)_n,$$

где $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)$ и $(\alpha)_0 = 1$.

Затем рассматривается n случайных величин ξ_j со средними нуль и с нормальным совместным распределением и находится вероятность P_n того, что одновременно все n переменных величин положительны. В частности, при $n=2$ получается соотношение, найденное Стилтьесом и Шеппардом: $P_2 = 1/4 + 1/2\pi \arcsin \rho_{12}$, (см. Крамер Г., Математические методы статистики, Рус. пер. под ред. А. Н. Колмогорова. М., 1948, стр. 321). А. К. Митропольский

6734. **Распределение отношения размаха к стандартному отклонению в выборке из нормальной совокупности. Дейвид, Хартли, Пирсон** (The distribution of the ratio, in a single normal sample, of range to standard deviation. David H. A., Hartley H. O., Pearson E. S.), Biometrika, 1954, 41, № 3—4, 482—493 (англ.).

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка из нормально распределенной совокупности, $\bar{x} = 1/n \sum x_i$, $s^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2/(n-1)$, $w = x_{\max} - x_{\min}$, $u = w/s$. Излагаются два метода вычисления величин u_α, определяемых равенством $P(u \geqslant u_\alpha) = \alpha$.

Первый метод: моменты величины u легко находятся по известным моментам величин s и w. Распределение величины u заменяется надлежащим образом подобранным распределением, моменты низших порядков которого совпадают с моментами величины u. (В дальнейших расчетах аппроксимирующее распределение выбирается из кривых пирсоновской системы таким образом, чтобы его первые четыре момента совпадали с соответствующими моментами величины u).

Второй метод: Рассматривается величина $u' = (x_j - x_k)/s$, которая функционально связана с величиной t, имеющей распределение Стьюдента с $n-2$ степенями свободы, соотношением $u' = t\sqrt{2(n-1)}/\sqrt{t^2 + n - 2}$.

При

$$U \geqslant \sqrt{3/2\,(n-1)} \qquad (1)$$

имеет место равенство

$$P\,(u \geqslant U) = n\,(n-1)\,P\,(u' \geqslant U),$$

что и позволяет вычислить u_α по известным значениям величины t_α, определяемой соотношением $P\,(t \geqslant t_\alpha) = \alpha$: $u_\alpha^2 = 2\,(n-1)\,t_{\alpha'}^2/(t_{\alpha'}^2 + n - 2)$, где $\alpha' = \alpha/n\,(n-1)$.

В силу условия (1) второй метод при $\alpha \leqslant 0{,}05$ применим, строго говоря, только для $n \leqslant 10$, однако произведенные подсчеты показывают хорошее согласие обоих методов вычисления u_α до $n = 20$. Дается таблица значений u_α, причем для $\alpha = 0{,}995$; 0,99; 0,975; 0,95; 0,9 и $n \geqslant 10$ вычисления проводились первым методом, а для $\alpha = 0{,}1$; 0,05; 0,025; 0,01; 0,005 для малых выборок ($n < 20$) вторым методом, а для больших ($n \geqslant 20$) первым методом.

В конце работы приведены интересные конкретные примеры приложений распределения величины u к различным статистическим задачам (исследование однородности выборки, отклонение выпадающих наблюдений, обнаружение эксцесса и т. п.). А. А. Петров

6735. О теореме Питмана. Нотер (On a theorem of Pitman. Noether Gottfried E.), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 1, 64—68 (англ.)

Пусть имеются два критерия с одинаковым уровнем, предлагаемые для проверки некоторой простой статистической гипотезы при заданной альтернативной гипотезе. Относительной эффективностью второго критерия по отношению к первому автор называет отношение n_1/n_2, где n_2 — объем выборки, требуемый для получения такой же мощности второго критерия, какой обладает первый критерий при использовании выборки объема n_1. Обобщается неопубликованная теорема Питмана об асимптотической относительной эффективности двух критериев. Гипотеза $H_0: \theta = \theta_0$. Статистика, используемая в критерии: $T_n = T\,(x_1, \ldots, x_n)$. При этом $ET_n = \psi_n(\theta)$ и $D\,(T_n) = \sigma_n^2(\theta)$. Предполагаются выполненными следующие условия: A) $\psi_n'(\theta_0) = \ldots = \psi_n^{(m-1)}(\theta_0) = 0$, $\psi_n^{(m)}(\theta_0) > 0$, B) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-m\delta}\psi_n^{(m)}(\theta_0) = \sigma_n(\theta_0) = c > 0$ при некотором $\delta > 0$. Альтернативная гипотеза $H_1: \theta_n = \theta_0 + k/n^\delta$, где $k > 0$. Дальнейшие условия: C) $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n^{(m)}(\theta_n)/\psi_n^{(m)}(\theta_0) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(\theta_n)/\sigma_n(\theta_0) = 1$, D) распределение величины $[T_n - \psi_n(\theta)]/\sigma_n(\theta)$ сходится к нормальному (0,1) распределению равномерно относительно θ в сегменте $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + d$ при некотором $d > 0$. Предположим теперь, что имеются два критерия, основанные на статистиках T_{1n} и T_{2n} с $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ и $m_1 = m_2 = m$. При указанных условиях асимптотическая относительная эффективность двух критериев равна

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{\psi_{2n}^{(m)}(\theta_0)}{\psi_{1n}^{(m)}(\theta_0)} \cdot \frac{\sigma_{1n}(\theta_0)}{\sigma_{2n}(\theta_0)}\right]^{1/m\delta}.$$

В частности, при $\delta = 1/2$ для несмещенных статистик T_{1n} и T_{2n} этот предел равен $\lim\limits_{n\to\infty} [\sigma_{1n}^2(\theta_0)/\sigma_{2n}^2(\theta_0)]$. В. В. Петров

6736. Точные критерии для серийного коэффициента корреляции. Ханнан (Exact tests for serial correlation. Hannan E. J.), Biometrika, 1955, **42**, № 1—2, 133—142 (англ.)

Пусть имеется марковский процесс $x_t - m = \rho\,(x_{t-1} - m) + \varepsilon_t$, где ε_t — случайные величины, распределенные нормально со средним 0 и дисперсией $\sigma^2(1-\rho^2)$, $|\rho| < 1$. Огавара (Ogawara M., Ann. Math. Statistics, 1951, 22, 115) предложил критерий для проверки простой гипотезы для ρ, основанный на точном распределении статистики

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} (x_t' - \bar{x}')\,(x_{2t} - \bar{x}_2)}{\sum (x_t' - \bar{x}')^2},$$

где $x_t' = \frac{1}{2}\,(x_{2t-1} + x_{2t+1})$, которая является несмещенной оценкой для $2\rho\,(1+\rho^2)^{-1}$. Показано, что эффективность оценки $\hat{\rho}_1$ для ρ, определяемой равенством

$$\hat{\rho}_1 = [1 - \sqrt{1 - \hat{b}_1^2}]/\hat{b}_1,$$

стремится к единице при $\rho \to 0$. В заключение изучаются асимптотические свойства некоторых оценок для неизвестных параметров β_j и ρ, входящих в уравнения

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t,$$

где $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \eta_t$, $\eta_t \in N(0, \sigma\sqrt{1-\rho^2})$, $|\rho| < 1$, ε_t не зависят от x_{jt}. Отмечается, что полученные критерии для малых выборок могут быть далеки от оптимальных. В. В. Петров

6737. О корреляции эффективных оценок для неизвестных параметров. Огава, Кого (On the correlation of efficient estimates of unknown parameters. Ogawa Junjiro, Kogo Kusunori), Osaka Math. J., 1955, **7**, № 1, 15—22 (англ.)

Пусть $f(x; \alpha)$ — плотность распределения генеральной совокупности, α_0^* — эффективная оценка для неизвестного параметра α и α^* — какая-нибудь регулярная несмещенная оценка с эффективностью e. Как известно (см., например, Крамер Г., Математические методы статистики, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1948, 523), коэффициент корреляции между α_0^* и α^* равен $\sqrt{e}$. Авторы дают другое, с определенной точки зрения более предпочтительное, доказательство этого утверждения и обобщают его на случай нескольких неизвестных параметров. Пусть плотность распределения генеральной совокупности $f(x; \alpha)$, где α — вектор-столбец $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, α_0^* — эффективная оценка для α и α^* — несмещенная регулярная оценка для α с эффективностью e. Коэффициент корреляции между α_0^* и α^* определяется равенством

$$\rho\,(\alpha_0^*, \alpha^*) = \Lambda_{01}/\sqrt{\Lambda_{00}\Lambda_{11}},$$

где например Λ_{01} — определитель матрицы $E[(\alpha_0^* - \alpha)\,(\alpha^* - \alpha)']$. Тогда $\rho\,(\alpha_0^*, \alpha^*) = \sqrt{e}$. В. В. Петров

6738. Таблицы распределений чисел превышения. Эпстейн (Tables for the distribution of the number of exceedances. Epstein Benjamin), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 4, 762—768 (англ.)

Пусть две независимые случайные выборки каждая размера n извлечены из совокупности с непрерывным распределением. Обозначим через U_r^n число значений из первой выборки, превышающих r-ое наименьшее значение из второй выборки. Приведены таблицы вероятностей $P\,\{U_r^n \leqslant x\}$ для $r = 1(1)[n/2]$, $x = (r-1)(1)(n-r-1)$ и $n = 2(1)15(5)20$.

Назовем «первой» ту из двух выборок, у которой r-ое наименьшее наблюдение больше r-го наблюдения «второй» выборки. Обозначим в этом случае через W_r^n число превышений результатов «второй» выборки над r-ым наблюдением «первой». Вероятность $P\{W_r^n \leqslant x\}$ может быть найдена по таблицам для $P\{U_r^n \leqslant x\}$.

Указывается на возможность применения величин U_r^n и W_r^n как критериев, основанных на двух выборках, для проверки смещения среднего и в вопросах долговечности.

Распределение величины U_r^n было изучено в работе Гумбеля и Шеллинга (Gumbel E. J., Schelling H. von, Ann. Math. Statistics, 1952, 21, 247—262).

Е. Л. Ющенко

6739. **Критерии для проверки гипотез о модели линейной авторегрессии. I. Распределения для нулевой гипотезы в схеме Юла. Дженкинс** (Tests of hypotheses in the linear autoregressive model. I. Null hypothesis distributions in the Yule scheme. Jenkins G. M.), Biometrika, 1954, 41, № 3—4, 405—419 (англ.)

Предполагается, что наблюденный ряд чисел $x_1, \ldots, x_n$ есть реализация последовательности случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями, удовлетворяющей соотношениям

$$x_i = \alpha_1 k_{i-1} + \alpha_2 x_{i-2} + \ldots + \alpha_k x_{i-k} + z_i;\ x_{n+i} = x_i,$$

где z_i — взаимно независимые нормальные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. Если $\alpha_i = 0$ при $i > 1$, последовательность является марковской; если $\alpha_i = 0$ при $i > 2$, модель называется схемой Юла. В случае схемы Юла рассматриваются критерии для проверки гипотез о равенстве нулю одной или обеих величин α_1, α_2. Эти критерии конструируются из коэффициентов корреляции $r_1 = \Sigma x_i x_{i+1} / \Sigma x_i^2$, $r_2 = \Sigma x_i x_{i+2} / \Sigma x_i^2$, так что распределения вероятностей для критериев определяются совместным распределением $p(r_1, r_2)$.

Подвергается критике приближенная формула для распределения $p(r_1, r_2)$, предложенная Квенелем. Вычисляется ряд моментов этого распределения, а также моменты величины $v = (r_2 - r_1^2)/(1 - r_1^2)$, с помощью которых строятся сглаженные распределения для v, (r_1, v), (r_1, r_2). Находятся поправки, необходимые при отличии от нуля среднего значения $\bar{x}$. Приводится один численный пример.

А. С. Монин

6740. **Планы со сбалансированными неполными блоками и тактические конфигурации. Спротт** (Balanced incomplete block designs and tactical configurations. Sprott D. A.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 4, 752—758 (англ.)

6741. **Приложение теории больших чисел к расчету индексов. Лукомский Я. И.**, Уч. зап. по статист., 1955, 1, 193—220

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

6742. **Некоторые функциональные уравнения в теории динамического программирования. I. Функции точки и точечные преобразования. Белман** (Some functional equations in the theory of dynamic programming. I. Functions of points and point transformations. Bellman R.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 80, № 1, 51—71 (англ.)

Исследуется уравнение

$$f(p) = \sup_q [g(p, q) + h(p, q) f(T(p, q))], \qquad (1)$$

где $p \in D \subset E_N$, $q \in S \subset E_M$, $T(p, q) \in D$, а f, g и h — принимающие вещественные значения функции. Уравнение (1) называется уравнением первого рода, если а) $0 \in D$; б) $g(p, q)$ равномерно ограничена при $q \in S$, и $\| p \| \leqslant c$ для любого c; в) $g(0, q) = 0$; г) $|h(p, q)| \leqslant 1$; д) $\| T(p, q) \| \leqslant a \| p \|$, $a < 1$; е) если $v(c) = \sup_{\| p \| \leqslant c} \sup_q |g(p, q)|$, то $\Sigma_{n=0}^{\infty} v(a^n c) < \infty$. Уравнение (1) называется уравнением второго рода, если соблюдается б); г') $|h(p, q)| \leqslant a < 1$ равномерно для всех $q \in S$ и $\| p \| \leqslant c$ для любого c; д') $\| T(p, q) \| \leqslant \| p \|$ или D ограничено. Уравнения (1), отличные от уравнений первого и второго рода, называются уравнениями третьего рода.

Доказывается, что уравнение первого рода имеет единственное непрерывное при $p = 0$ решение. Уравнение второго рода имеет единственное решение, ограниченное в любой конечной части D. Решения находятся методом последовательных приближений. Указываются случаи монотонной сходимости последовательных приближений к решению. Доказываются теоремы об устойчивости решений. Рассматриваются некоторые обобщения уравнения (1). Выясняются некоторые факты, связанные с уравнениями третьего рода. Приводятся примеры (в том числе включающие игры с разорением).

Н. Н. Воробьев

6743. **Динамическое программирование и новый формализм в теории интегральных уравнений. Белман** (Dynamic programming and a new formalism in the theory of integral equations. Bellman Richard), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 1, 31—34 (англ.)

Указана возможность применения теории динамического программирования к нахождению функционального уравнения для собственных значений интегрального уравнения

$$\lambda u(t) = \int_0^T K(s, t) u(s)\, ds$$

с положительно определенным ядром.

Рассматривается более общая задача о нахождении

$$f(a; r(t)) \min_u \int_a^T u^2(t)\, dt$$

при условии

$$\int_a^T \int_a^T K(s, t) u(s) u(t)\, dsdt + 2 \int_a^T r(t) u(t)\, dt = 1.$$

Функция f должна удовлетворять уравнению

$$f_a = -\min_{u(a)} [u^2(a) + u(a) r(a) \delta_{r(t)}(f) + \delta_{K(a,t)}(f)],$$

где $\delta_R(t)$ — производная Гато.

В формуле (3.3) ошибочно написано max вместо min.

И. В. Романовский

6744. **Функциональные уравнения в теории динамического программирования. V. Положительность и квази-линейность. Белман** (Functional equations in the theory of dynamic programming. V. Positivity and quasi-linearity. Bellman Richard), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1955, 41, № 10, 743—746 (англ.)

Рассматривается функциональное уравнение $u(p) = \max_q [L(u, p, q) + a(p, q)]$, где p, q — векторы, про-

бегающие множества R и $S = S_p$ соответственно, L есть линейный оператор относительно u. Даются достаточные условия того, что

$$u(p) = \max_q v(p, q), \qquad (1)$$

где $v(p, q)$ есть решение уравнения

$$v(p) = L(v, p, q) + a(p, q). \qquad (2)$$

Подобные же условия даются для более сложного уравнения, содержащего два параметра q и γ'. Приводятся некоторые приложения и примеры.

Примечание референта. Предположение о линейности L излишне. В символе $v(p, q)$, а также в формулах (1) и (2) под q надо подразумевать функцию $q(p)$. Если S не зависит от p, то последнее замечание излишне, и, сверх того, условия автора могут быть несколько смягчены. В решении уравнения Риккати можно $q(s)$ заменить на постоянную. М. К. Гавурин

6745. Очерк линейного программирования. Вайда (An outline of linear progamming. Vajda S.), J. Roy. Statist. Soc., 1955, **B17**, № 2, 165—172 (англ.)

Дается определение линейного программирования и приводятся примеры его применений. Указываются методы решения. Резюме автора

6746. Об итерационном процессе получения корня Перрона положительной матрицы. Белман (On an iterative procedure obtaining the Perron root of a positive matrix. Bellman Richard), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 5, 719—725 (англ.)

Пусть $A = (a_{ij})$ — положительная квадратичная матрица и $p(A) > 0$ — ее наибольший по модулю характеристический корень (корень Перрона). Известно, что

$$p(A) = \max_x \min_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j/x_i = \min_n \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j/x_i,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_j \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Доказывается:

1. $p(A) = \max_R \min_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j/x_i = \min_R \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j/x_i$,

где $R = (x : x_i \geqslant d, \sum_{i=1}^n x_i = 1)$ и параметр d зависит только от A. В частности, можно положить

$$d = \min_{i,j} a_{ij} / \max_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\right)$$

2. $p(A)$ является единственным решением уравнения

$$\lambda = \max_R \min_i \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \lambda(1 - x_i)\right]$$

или уравнения

$$\lambda = \min_R \max_i \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \lambda(1 - x_i)\right].$$

3. $p(A) = \lim_{n\to\infty} u_n$, где u_n определяется рекуррентно

$$u_{n+1} = \min_R \max_i \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + u_n(1 - \ldots)\right],$$

а u_0 можно выбрать произвольно. В частности, если положить $u_0 = \min_R \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, то последовательность $\{u_n\}$ будет неубывающей.

При доказательстве автор пользуется теоремой минимакса теории игр и замечанием Шепли (Shapley L., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1937, 8, 73—78) о том, что пределом последовательности $\{\lambda_n\}$, где

$$\lambda_0 = \min_y \max_x (x, Ay) = \max_x \min_y (x, Ay),$$
$$\lambda_{n+1} = \min_y \max_x [(x, Ay) + \lambda_n(1 - (x, By))] =$$
$$= \max_x \min_y [(x, Ay) + \lambda_n(1 - (x, By))],$$
$$0 < b \leqslant (x, By) < 1 \text{ для всех}$$
$$(x; y) \in \{(x; y) : x_i \geqslant 0,\ y_i \geqslant 0,\ \textstyle\sum_{i=1}^n x_i = 1,$$
$$\textstyle\sum_{i=1}^n y_i = 1\},$$

является

$$\min_y \max_x \frac{(x, Ay)}{(x, By)} = \max_x \min_y \frac{(x, Ay)}{(x, By)}$$

(обобщенная теорема минимакса). В. А. Статулявичус

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

6747. Граница вероятности ошибки для лишенного памяти канала с помехами. Фейнстейн (Error bounds in noisy channels without memory. Feinstein Amiel), IRE Trans. Inform. Theory, 1955, 1, № 2, 13—14 (англ.)

Через канал пропускной способности C информация может быть передаваема с любой скоростью, меньшей чем C, причем вероятность ошибки на выходе канала может быть с помощью надлежащего кодирования сделана как угодно малой. Эта фундаментальная теорема, доказанная Шенноном в его первых работах по теории информации, была недавно установлена новым методом в статье Фейнстейна (РЖМат, 1955, 3876). Однако, ни одно из этих доказательств не позволяло найти верхней границы для вероятности ошибки, между тем как для приложений именно этот вопрос является важнейшим. В настоящей статье доказывается, что в случае канала, лишенного памяти, и с конечным алфавитом вероятность ошибки не превосходит величины $F\exp[-Bn(C - H)^2]$, где H — энтропия питающего источника, n — длина закодированных цепочек, а F и B — положительные числа, не зависящие от n и H. А. Я. Хинчин

6748. Исследование задач на время ожидания с помощью редукции к марковским процессам. Такач (Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes. Takács Lajos), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, **6**, № 1—2, 101—129 (англ.; рез. русс.)

Рассматривается вопрос о времени ожидания для очереди с одним обслуживающим устройством. Заявки обслуживаются в порядке их поступления. Время обслуживания подчиняется для всех заявок одному и тому же закону распределения $H(x)$. В основном изучаются два случая.

1. Поток заявок — пуассоновский, но вообще говоря с переменной интенсивностью $\lambda(t)$. Время ожидания $\eta(t)$ для заявки, поступающей в момент t, представляет собой марковский процесс; закон распределения $F(t, x)$ величины $\eta(t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda(t)\left\{F - \int_0^x H(x - y)\,d_y F(t, y)\right\}$$

и определяется однозначно, если задано $F(t, 0)$.

2. Поток заявок — пуассоновский с постоянной интенсивностью λ. Если η_n означает время ожидания

для n-й заявки, то случайные величины $\eta_1, \eta_2, \ldots$ образуют однородную цепь Маркова, а их законы распределения $F_n(x) = P(y_n \leqslant x)$ определяются рекуррентно формулой

$$F_n(x) = \int_0^\infty K(x, y)\, dF_{n-1}(y) \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

где

$$K(x, y) = H(x - y) + \int_{x-y}^{\infty} e^{-\lambda(u+y-x)} dH(u).$$

Пусть $G(u)$ — закон распределения «периода обслуживания», т. е. промежутка времени сплошной занятости обслуживающего устройства, и

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dG(x) \quad [\Re(s) > 0];$$

тогда $\Gamma(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Gamma(s) = \psi[s + \lambda - \lambda\Gamma(s)],$$

где

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x).$$

$G(x)$ однозначно определяется по $\Gamma(s)$.

Пусть q_i означает вероятность того, что в течение случайно выбранного периода обслуживается i заявок. Производящая функция

$$\Phi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \omega$$

этого распределения удовлетворяет уравнению

$$\Phi(\omega) = \omega\psi[\lambda - \lambda\Phi(\omega)]$$

и однозначно определяется условием $\Phi(0) = 0$ и требованием аналитичности при $|\omega| \leqslant 1$. Библ. 18 назв.

А. Я. Хинчин

6749. Исследование немарковских стохастических процессов способом введения добавочных переменных. Кокс (The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. Cox D. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 3, 433—441 (англ.)

Известно, что при аналитическом исследовании стационарной очереди мы встречаемся с марковским процессом только в том случае, когда время обслуживания подчиняется показательному закону распределения. В общем случае очередь описывается немарковским процессом, что значительно затрудняет ее исследование. Существует несколько способов подхода к этой задаче, и среди них — известный метод введения одной или нескольких величин, при фиксированных значениях которых процесс становится марковским. По-видимому, до сих пор были известны только общие идейные основания этого метода и анализ некоторых частных примеров его применения. Статья ставит себе целью построение широкого класса немарковских процессов типа стационарной очереди, для исследования которых описанный метод может принести существенное упрощение. В частности, этот класс охватывает очереди с любым числом обслуживающих устройств и любым постоянным законом распределения расстояний между двумя последовательными вызовами, причем время обслуживания, вообще говоря, может подчиняться различным законам для различных обслуживающих устройств. Как обычно, решение задачи значительно облегчается, если законы распределения всех или некоторых добавочных случайных величин имеют рациональные преобразования Лапласа, применяемый метод в этом случае сближается с известным приемом Эрланга для случая, когда время обслуживания разбивается на «стадии», длина каждой из которых распределена по некоторому показательному закону.

Автор указывает, что во всех случаях получаемым им (вообще говоря, интегро-дифференциальные) уравнения рассматриваются лишь с формальной стороны. В частности, вопросы существования и единственности решений нигде не ставятся. А. Я. Хинчин

6750. Статистический расчет энтропии на одно слово для четырех западных языков. Барнард (Statistical calculation of word entropies for four western languages. Barnard G. A., III), IRE Trans. Inform. Theory, 1955, IT-1, № 1, 49—53 (англ.)

Пользуясь несколько видоизмененным методом, с помощью которого Шеннон статистически определял энтропию F на одно слово для английского языка, автор проделывает аналогичный расчет для четырех западноевропейских языков: английского, немецкого, французского и испанского. Необходимость видоизменения метода вызывается особенностями выбранных языков и наличного статистического материала (так в статистике английских слов принято считать различные формы глагола различными словами, в то время как в других языках их обычно не отличают от неопределенного наклонения).

Величина F оказывается наименьшей для немецкого языка, что, повидимому, обусловлено наличием в этом языке сравнительно большого числа длинных слов. По мнению автора, в очень многих случаях эти длинные слова представляют собой сочетания нескольких коротких слов. Отсюда делается заключение, что в немецком языке, в сравнении с другими, имеется меньше таких понятий, которым соответствуют самостоятельные (не составленные из других) термины. А. Я. Хинчин

6751. Ошибки в спектре мощности, вызванные конечностью выборки. Спетнер (Errors in power spectra due finite sample. Spetner Lee M.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 5, 653—659 (англ.)

Вместе со стационарным случайным процессом с непрерывным спектром — гауссовым шумом $I(t)$, определенным на всей временной оси, рассматривается отрезок этого шума, взятый на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, называемый выборкой. Отрезок шума периодически продолжается на всю временную ось

$$g(s \pm nT) = I(s);\ 0 \leqslant s < T;\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Периодическая функция $g(t)$ может быть подвергнута спектральному или корреляционному анализу.

Рассматривается спектр функции $g(t)$ и определяется, с какой точностью спектр шума может быть оценен спектром этой периодической функции.

Указывается, что при экспериментальном осуществлении такой процедуры возникают трудности в связи с наличием разрывов у функции $g(t)$ в точках $t = \pm nT$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Я. И. Хургин

6752. Теория информации. Третья лондонская конференция. Черри (Information theory. Third London Symposium. Cherry Colin), Nature, 1955, 176, № 4486, 773—774 (англ.)

Краткий отчет о конференции. Предметы обсуждения: обзор основных понятий; приложения к физике; вопросы кодирования; приложения к языковедению; механические переводы с языка на язык; психологические и неврофизиологические приложения. А. Я. Хинчин

6753. Схема станка и измерительного прибора. Романовский В. И., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, № 15, 19—29

Рассмотрена следующая задача и некоторые ее обобщения: случайная величина ξ подчинена нормальному определению со средней a и дисперсией σ^2. Далее даны независимые случайные величины $y_1, y_2, \ldots, y_n$, имеющие нормальные распределения с дисперсией σ_1^2 и средней ξ. Требуется определить распределения величин $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ и $s^2 = \sum (y_i - \bar{y})^2/(n-1)$. Показывается, что величины $\bar{y}$ и s независимы, $\bar{y}$ определено со средним a и дисперсией $(\sigma_1^2 + n\sigma^2)/n$.

Изученные задачи проиллюстрированы на примерах текущего статистического контроля и пристрелки. Имеются многочисленные опечатки. Б. В. Гнеденко

6754. **О приложении статистики к химическим исследованиям. Филипп** (Sur l'application de la statistique en recherche chimique. Philippe Jean), Bull. Soc. chim. France, 1955, № 11—12, 1634—1642 (франц.)

См. также: 6391, 6637, 6674, 6693, 6694, 6695, 6886, 6889

ГЕОМЕТРИЯ

55. **Неевклидовость Вселенной. Папп** (El Universo es no-euclídeo. Papp Desiderio), Ibérica, 1955, 22, № 311, 148—151, 157 (исп.)

56. **Понятие и цель единых теорий поля. Пинль** (Begriff und Ziel der einheitlichen Feldtheorien. Pinl M.), Math.-phys. Semesterber., 1955, 4, № 3-4, 183—194 (нем.)

Излагается история возникновения двух родов единых теорий поля (точка зрения «мировой геометрии» и точка зрения квантовой теории). Дается беглый обзор различных единых теорий поля (главным образом первого рода), включая последние работы Эйнштейна по несимметрическому полю. А. П. Широков

57. **Построение объемных наглядных графиков. Кауров В. А.,** Науч. работы студентов Свердлов. пед. ин-та, 1955, № 1, 100—106

58. **Координаты Гаусса. Папп** (Las coordenadas de Gauss. Papp Desiderio), Ibérica, 1955, 22, № 316, 343—345, 356 (исп.)

59. **О возможности решения задач на построение одним циркулем с ограниченным раствором ножек. Костовский А. Н.,** Наук. зап. Львівськ. ун-ту, 1955, **29**, № 6 (1), 88—97

Доказывается, что все конструктивные задачи в плоскости Евклида, разрешимые при помощи линейки и циркуля, могут быть решены одним циркулем, которым можно описывать окружности любого радиуса, не превосходящего некоторого данного отрезка R. В построениях существенную роль играют инверсионные преобразования. К. К. Мокрищев

60. **Треугольник как геометрический оператор. Зидлер** (Le triangle comme opérateur géométrique. Sydler J. P.), Elem. Math., 1955, **10**, № 5, 100—105 (франц.)

Выбран произвольный треугольник $P_0Q_0R_0$. Можно провести в соответствие каждой паре точек P и Q единственную точку R, если потребовать, чтобы треугольник PQR был соответственно подобен треугольнику $P_0Q_0R_0$. В случае, если точка P фиксирована и точка Q описывает прямую, то и точка R описывает определенную прямую.

В статье рассматриваются кривые, описываемые точкой R, когда P и Q описывают определенные кривые. Если предположить, что каждой точке P кривой C порядка n (нулевого жанра) соответствует k точек кривой D порядка p и что каждой точке кривой Q соответствует h точек P, и если все треугольники PQR подобны, то геометрическим местом точек R является кривая порядка $hp + kn$. Приводятся еще и другие теоремы относительно геометрического места точек R. С. И. Зетель

61. **Сферы, ассоциированные с тетраэдром. Тебо** (Sphères associées á un tétraèdre. Thébault Victor), Mathesis, 1954, **63**, № 6—8 (Supplément, 25—30) (франц.)

Степень P_d вершины D тетраэдра $ABCD$ относительно сферы s_1, проходящей через центр тяжести тетраэдра и центры тяжести граней, инцидентных вершине D, равна одной шестой разности суммы квадратов ребер, проходящих через D, и суммы квадратов ребер, не проходящих через D. Сфера, ортогональная четырем сферам $(A, \sqrt{|P_a|})$, $(B, \sqrt{|P_b|})$, $(C, \sqrt{|P_c|})$, $(D, \sqrt{|P_d|})$, концентрична двенадцатиточечной сфере, а ее радиус σ выражается формулой $\sigma = (R^2/9 + S/18)^{1/2}$, где R — радиус описанной около тетраэдра сферы s_2, а S — сумма квадратов всех ребер тетраэдра. Тетраэдр, у которого сфера s_1 проходит через вершину D, обладает следующими свойствами: 1) бимедианы равны касательным, проведенным из точки D к сферам, построенным на ребрах, не проходящих через D, как на диаметрах, 2) медиана, проходящая через вершину D, перпендикулярна к прямой Эйлера, 3) точка D одинаково удалена от центра O описанной сферы и точки M, симметричной с O относительно центра тяжести тетраэдра. Если, кроме того, сфера s_1 касается сферы s_2, то грани, проходящие через D, являются автомедианными треугольниками (автомедианным называется треугольник, половина суммы квадратов двух сторон которого равна квадрату третьей стороны). В работе имеются опечатки и неточности. В формуле (3) неверно, что $P_d = P_a = P_b = P_c$; на стр. 26 неверно указан коэффициент гомотетии (должно быть — 3 вместо — 1/3) и не оговорено, что выражения $M_d/4 + R'_d$ и $3M_d/4 - R'_d$ понимаются в векторном смысле. Р. Н. Щербаков

6762. **Тетраэдр, ассоциированный с секиркой Архимеда. Тебо** (Tétraèdre associé au tranchet d'Archimède. Thébault Victor), Mathesis, 1954, **63**, № 6—8 (Supplément, 14—24) (франц.)

Фигура, состоящая из трех полуокружностей MQN, MCP и PBN, расположенных с одной стороны от общего диаметра MNP, называется секиркой Архимеда. Пусть Q, C и B — середины этих полуокружностей, а A — точка, симметричная с Q относительно прямой MN. При движении точки P по диаметру MN треугольник ABC будет изменяться, оставаясь остроугольным. При этом его ортоцентр H описывает эллипс E, центр тяжести движется по прямой MN, центр O' описанного круга и точки A', D', B', C', симметричные относительно O' точкам A, H, B, C, описывают кривые третьего порядка $\Gamma_{O'}$, $\Gamma_{A'}$, $\Gamma_{D'}$, $\Gamma_{B'}$, $\Gamma_{C'}$, из которых первые три имеют узловые точки, а последние две — точки возврата. Далее рассматривается равногранный тетраэдр $ABCD$, построенный на треугольнике ABC. При движении точки P по диаметру MN плоскость $MND \equiv \pi$ остается неподвижной и образует с плоскостью ABC угол $\theta = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2}$. Это

дает возможность определить кривые, описываемые вершиной D и центрами I, I_d, I_a, I_b, I_c вписанного и вневписанных шаров. Первые три кривые лежат в плоскости π и имеют кривые $\Gamma_{D'}$, $\Gamma_{O'}$ и E своими ортогональными проекциями на плоскость ABC; четвертая получается из второй гомотетией $(A, 2)$; последние две суть симметричные друг другу относительно плоскости AQA_3, перпендикулярной плоскости ABC, пространственные кривые третьего порядка, причем их общая соприкасающаяся плоскость в точке A перпендикулярна к AQ. В работе имеется ряд опечаток и неточностей. Наиболее существенные из них: 1) асимптота кубики $\Gamma_{D'}$ проходит не через точку O'', как можно понять из текста стр. 16, а через точку, симметричную с центром O полуокружности MQN относительно точки Q; 2) чтобы эллипс E совпал с эллипсом Штейнера, надо сдвинуть его не на $G'O$, как указано на стр. 15, а на $2G'O$; 3) в формулах для объема тетраэдра (стр. 18) пропущены множители r (в предпоследней) и $1/3$ (в последней). Р. Н. Щербаков

6763. О классической задаче Якова Бернулли. Новое приближенное решение. Романо (Sul classico problema di Giacomo Bernoulli. Nuova soluzione pratica. Romano Ferdinando), Riv. catasto e serv. tech. erariali, 1954, **9**, № 5, 351—363 (итал.)

Статья посвящена задаче Бернулли: разделить данный треугольник на четыре равновеликие части двумя взаимно перпендикулярными прямыми. Приведены краткие исторические сведения. Элементарные вычисления приводят к приближенному решению задачи. О точности приближения можно судить по примеру: если длины сторон треугольника $AB = 45$, $AC = 40$, $BC = 30$, то искомые прямые отсекают на прямых AB и CB отрезки $AM = 28{,}689$; $CQ = 16{,}898$ и делят AC на части 4,492; 26,879; 8,629. Г. И. Дринфельд

6764. О вписанном шестиугольнике. Гурматай (Sur l'hexagone inscriptible. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1954, **63**, № 9-10, 335—338 (франц.)

Пусть A', B', C' — основания перпендикуляров, опущенных из вершин треугольника ABC на прямую a. Перпендикуляры, опущенные из точек A', B', C' на стороны BC, CA, AB, соответственно пересекаются в одной точке — ортополюсе прямой a относительно треугольника. Ортополюсы прямой a относительно треугольников $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ — вписанного в круг четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ лежат на одной прямой — ортополяре прямой a относительно этого четырехугольника.

Доказывается, что ортополяры пятнадцати сторон и диагоналей A_1A_2, A_1A_3 ... вписанного в круг шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ относительно четырехугольников $A_3A_4A_5A_3$, $A_2A_4A_5A_3$ ... проходят через одну точку. В статье имеются опечатки.

В. И. Шуликовский

6765. От стрелки к эрмитовой параболе. Специальная научно-методическая разработка. Дальман (Vom Pfeil zur Hermiteschen Parabel, eine fachwissenschaftliche didaktische Entwicklung. Dallmann Herbert), Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Math. naturwiss. Reihe, 1954—1955, **4**, № 6, 661—666 (нем.)

Точке (a, b, c, d) четырехмерного пространства приводится в соответствие стрелка на вещественной плоскости, исходящая из точки с декартовыми координатами (a, b) и имеющая острие в точке (c, d) плоскости. Прямая из R_4 изображается множеством стрелок, начала и острия которых находятся на двух прямых плоскости. Параболой Эрмита называется геометрическое место точек, равноотстоящих от некоторой точки и некоторой комплексной прямой, если расстояние между двумя комплексными точками определяется по Эрмиту. На примере параболы Эрмита показывается, как можно изображать на двумерной плоскости геометрические образы четырехмерного пространства, как наглядно представлять вращение вокруг плоскости из R_4. П. П. Касьянков

6766. Замечание к теореме Брауэра. Островский (Note on a theorem by A. Brauer. Ostrowski A. M.), Duke Math. J., 1955, **22**, № 3, 469—470 (англ.)

Дается новое, более простое, чем у Брауэра, доказательство следующей теоремы об овалах Кассини: Если для действительных a, b, c, k имеем $a < c < k$ и $b \leqslant c$, то совокупность точек z-плоскости, задаваемая уравнением $|z-b|\,|z-c| \leqslant (k-b)(k-c)$, лежит в открытой области $|z-b|\,|z-a| < (k-b)(k-a)$, за исключением точки $z = k$, которая является единственной общей точкой границ обеих совокупностей. К. М. Белов

6767. Об эволютах и эвольвентах плоских кривых. Островский (Über Evoluten und Evolventen ebener Kurven. Ostrowski Alexander), Arch. Math., 1955, **6**, № 3, 170—179 (нем.)

Даются не требующие трехкратной дифференцируемости доказательства известных теорем об эволютах и эвольвентах. Теоремы об эволютах: 1) нормаль к кривой касается ее эволюты в соответствующем центре кривизны; 2) длина дуги эволюты равна разности соответствующих радиусов кривизны данной кривой — доказываются при условии двукратной дифференцируемости кривой и строгой монотонности кривизны. Первая теорема сохраняет силу, если взамен монотонности кривизны потребовать, чтобы угол касательной с осью абсцисс был непрерывной, строго монотонной и выпуклой (или вогнутой) функцией дуги. Приводятся по два доказательства обеих теорем. Второе доказательство второй теоремы основано на приближении кривой и ее эволюты аналитическими кривыми, при этом используется следующая лемма: если дуги двух выпуклых кривых (с углом вращения касательной не более $\pi/2$) обладают тем свойством, что для каждой точки одной из них найдется соответствующая точка другой такая, что расстояние между ними меньше h, то длины дуг разнятся не более чем на $15\,h$.

Теорема о существовании эвольвенты доказывается в предположении двукратной дифференцируемости данной кривой, непрерывности и строгого возрастания угла касательной с осью абсцисс. А. Г. Школьник

6768. Окружности как двойные локсодромы. Вундерлих (Kreise als Doppelloxodromen. Wunderlich W.), Arch. Math., 1955, **6**, № 3, 230—242 (нем.)

Основным предметом изучения автора являются окружности, которые следует отнести к числу двойных локсодром, т. е. к числу кривых, пересекающих под постоянными углами плоскости двух пучков плоскостей с осями a и b. Изучение этих окружностей автор связывает с теориями конгруэнций прямых, окружностей и сфер, а также с некоторыми вопросами неевклидовой геометрии. Множество ∞^4 окружностей, которые автор определяет как общие локсодромы двух пучков плоскостей, можно разделить на две равноправные группы. Это деление основано на том, что оси двух окружностей образуют две эллиптические конгруэнции прямых, пересекающих пары противоположных ребер e, $\bar{e}$, и соответственно f, $\bar{f}$, мнимого тетраэдра, образованного минимальными плоскостями, проходящими через оси пучков a и b. Геометрическое место центров локсодромных окружностей сводится к двум плоскостям, проходящим через общий перпендикуляр прямых a и b и делящим пополам углы между ними. Плоскости локсодромных окружностей огибают два ортогональных гиперболических параболоида, проходящих че-

рез четырехсторонники $afb\bar{f}$ и соответственно $aeb\bar{e}$. Сферы, для которых локсодромные окружности являются окружностями больших кругов, имеют двойное касание с однополостными гиперболоидами, также проходящими через четырехсторонники $afb\bar{f}$ и $aeb\bar{e}$.

Если заранее заданы углы σ и τ, под которыми двойные локсодромы пересекают плоскости двух пучков, то среди таких локсодром имеется лишь конечное число, а именно 8, окружностей, принадлежащих по 4 каждой из двух групп локсодромных окружностей. Переходя к обобщениям, автор с помощью пространственной инверсии заменяет пучки плоскостей пучками сфер. При этом окружности переходят в окружности и задача определения локсодромных окружностей, общих для двух пучков сфер, сводится к предыдущей.

В. П. Белоусова

6769. Разбиение поверхностей рода 1 на подобные прямоугольники. Штёр (Zerlegung von Flächen vom Geschlecht eins in ähnliche Rechtecke. Stöhr Alfred), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 256—258 (нем.)

Указывается, что известные результаты, относящиеся к разбиению прямоугольника или всей плоскости на квадраты (общее — на подобные прямоугольники) (см., например, статью Brooks R. L., Smith C. A. B., Stone A. H., Tutte W. T., Duke Math. J., 1940, 7, 312—340, или в ином изложении, Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, раздел 4, М., Гостехиздат, 1952), могут быть перенесены на задачу о разбиении на прямоугольники тора; при этом тор следует представлять себе как прямоугольник с отождествленными противоположными сторонами или как плоскость, точки которой отождествляются заданием двух линейно независимых векторных периодов. Затем указывается, что эти результаты могут быть перенесены и на задачи разбиения поверхностей рода >1. И. М. Яглом

6770 К. Векторное исчисление. Брикар (Le calcul vectoriel. 9 ed. Bricard Raoul. Paris, A. Colin, 1955, 199 p., ill. 250 fr.), Bibliogr. France, 1955, 144, № 26, 613 (франц.)

6771 К. Общая теория линий второго порядка. Пособие по аналит. геометрии для студентов-заочников физ.-матем. фак. пед. ин-тов. Бабушкин Л. И., Иваницкая В. П., М., Учпедгиз, 1955, 64 стр., илл., 70 к.

6772 Д. Интегральные формулы пространственных производных. Сильде О. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тартуск. ун-т, Тарту, 1955

6773 Д. Существование многогранника с данной разверткой. Волков Ю. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1955

6774 Д. Центральные кривые четвертого порядка. Чуб А. Т. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1955

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

6775. Классическая механика в геометрическом описании. Пиль (Den klassiske mekanik i geometrisk beskrivelse. Pihl Mogens), Kgl. danske videnskab. selskab. Mat.-fys. medd., 1955, 30, № 12, 26 s. (дат.; рез. англ.)

6776. Карно и понятие девиации. Бойер (Carnot and the concept of deviation. Boyer C. B.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 7, Part 1, 459—463 (англ.)

Термин deviation (отклонение, девиация) был введен А. Трансоном (Transon) в 1841 г. для обозначения угла между нормалью к плоской линии и геометрическим местом середин хорд, параллельных касательной. В литературе часто встречается ошибочное утверждение, что и само понятие впервые было введено Трансоном. На самом деле оно содержится в «Геометрии положения» Лазаря Карно (1803 г.). Карно вводит идею натурального уравнения кривой как зависимости между радиусом кривизны r и девиацией z; для параболы $y^2 = px$ он получает $r = 1/2\ p\ \mathrm{cosec}^3 z$. На двух страницах дана содержательная биография Л. Карно.

М. Я. Выгодский

6777. К кинематике качения со скольжением. Боттема (Zur Kinematik des Rollgleitens. Bottema O.), Arch. Math., 1954, 6, № 1, 25—28 (нем.)

Рассматривается в плоской кинематике движение твердого тела, некоторая кривая k которого совершает качение со скольжением по неподвижной кривой K и так, что длины дуг этих кривых между общими точками касания в момент $t = 0$ и в произвольный момент t имеют отношение λ, не зависящее от t. При $\lambda = 0$ получается случай чистого скольжения, при $\lambda = 1$ — чистого качения.

Мюллер (РЖМат, 1954, 3052) дал построение центров кривизны k и K при помощи центроид движений c и C. Автор упрощает построение этих центров и показывает, что в случае $\lambda \neq 1$ для построения центров кривизны k и K нужна фигура более низшего порядка.

Если P — общая точка касания кривых k и K, M_k и M_K — их центры кривизны в точке P, O — мгновенный полюс вращения и M — центр кривизны траектории, соответствующей точке P, для которой кривизна находится по формуле Эйлера—Савари, то простой подсчет кривизн приводит не только к результату Мюллера, что двойное отношение (OPM_KM_k) есть λ, но также $(OPMM_K) = 1/(1-\lambda)$ и $(OPMM_k) = \lambda/(1-\lambda)$.

Если полюс O и поворотный круг в данный момент даны, то при помощи построения Бобиллъера можно для любой точки P построить центр кривизны M и затем найти M_k и M_K. Однако из этой фигуры центры кривизн c и C не находятся. В. С. Люкшин

6778. Вспомогательные кинематические цепи, имеющие некоторые стабилизирующие свойства (позволяющие преодолеть мертвые положения). Гейл (Accessory linkages which have certain stabilizing properties. Gale E. I.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 2, 94—99 (англ.)

Указывается, что механизм антипараллелограмма (механизм Гарта) может после простых адаптаций служить для черчения циссоид, лемнискат и улиток, которые, за исключением несимметричного лемнискатоида, являются инверсиями конических сечений соответственно относительно их вершин, центров и фокусов. Механизм антипараллелограмма может быть заменен механизмом Липкина — Поселье, но в этом случае для преодоления мертвых положений необходимо присоединение особых кинематических цепей.

Дается применение механизмов антипараллелограмма Липкина — Поселье для получения циссоид. Описывается стабилизация лемнискатографа Бернулли, а также шарнирного четырехзвенника, применяемого для черчения лемнискат. Приводится схема и описание оригинального механизма, предназначенного для черчения гиперболических и эллиптических улиток и кардиоид (параболических улиток). Х. Х. Лепиксон

6779. Основы теории сопряженности и новые способы исследования и проектирования пространственных зубчатых зацеплений. Злотопольский М. Д., Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета, 1955, 32, 46—62

Утверждается, что использование винтового исчисления А. П. Котельникова позволяет упростить исследование зубчатого зацепления в случае зубообразова-

ния методом огибания (обката), но употребляемый далее винт является обычным кинематическим винтом.

Формулировка основного закона зацепления, состоящего по автору в том, что нормаль в точках касания сопряженных поверхностей должна быть лучом линейного комплекса винта относительного движения поверхностей, является известным (Cormac P., A treatise on screws and worm gear, their mills and hobs. London, 1936) положением, по которому в точках касания огибаемой Σ и огибающей нормали к Σ будут принадлежать к комплексу нормалей мгновенного винта. Кормаку принадлежат и те геометрические построения характеристик, которые изложены автором в трех теоремах параграфа «Геометрия характеристики». Основываясь на этих теоремах, автор приводит примеры решения ряда задач пространственного зацепления (исследование зацепления поверхностей, нарезаемых путем обката резцовой головкой и др.).

В параграфе «Основные теоремы сопряженности» сначала доказывается одно обобщение первой теоремы Гохмана — Оливье на случай, когда каждая из сопряженных поверхностей обкатывается своей производящей. Это обобщение впрочем уже встречалось в литературе как третий способ образования сопряженных поверхностей, из которых первые два способа Гохмана — Оливье вытекают как частные случаи. Рассматриваются три теоремы сопряженности, из которых в первой доказывается необходимость для несовпадающих производящих быть линейчатыми и развертывающими; при доказательстве делается допущение, что нарезание производится инструментальными геликоидами. В остальных двух теоремах приводятся условия образования линейчатых и точечных зацеплений.

В последнем параграфе «Дифференциальные способы решения задач зубообразования» предлагается заменить в окрестности точки контакта производящую и нарезаемую поверхности касательной плоскостью, а за элементы линии зацепления в двух плоскостях сопровождающего триэдра линии зуба взять некоторые прямые, угловые параметры которых и названы дифференциальными параметрами зацепления. Их использование не приведено. В статье имеются опечатки, ссылки на отсутствующие формулы. В. С. Люкшин

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6780. **К обоснованию аналитической геометрии. Ленц** (Zur Begründung der analytischen Geometrie. Lenz Hanfried. Sitzungsber. math.-naturwiss. Kl. Bayerischen Akad. Wiss. München, 1954 (1955), 17—72 (нем.)

Рассматриваются различные варианты аксиоматик для проективного, аффинного, клейновского и евклидова пространств многих измерений. На основе этих аксиоматик соответствующие геометрии доводятся до построения аналитической геометрии над полем произвольных алгебраических чисел.

В первой главе в основу построения проективного пространства кладутся понятия точки, прямой, инцидентности и следующие аксиомы: I. Через две точки проходит одна и только одна прямая. II. Из пересечения прямых AB и CD следует пересечение прямых AC и BD. III. На всякой прямой существуют три точки. IV. Существуют две непересекающиеся прямые (случай $n=2$ исключается). Понятия зависимости точек, подпространства различного числа измерений и, в частности, гиперплоскости определяются.

При переходе к аффинному пространству добавляется понятие связки параллельных прямых и аксиомы: I_a — совпадает с I, I_b — аксиома Евклида, II_a. Если $AB \parallel CD$, а PA совпадает с PC, то PB пересекает CD. II_b. Если $CM \parallel AB$, а $BN \parallel AC$, то CM и BN пересекаются. III. На всякой прямой существуют две точки. IV. Существуют две непересекающиеся и непараллельные прямые.

На основе этих аксиом определяются аффинные преобразования, а затем и операции сложения точек и умножения точек и гиперплоскостей, позволяющие отнести всякой точке координаты, принадлежащие некоторому алгебраическому телу. Проективное пространство n измерений рассматривается как изоморфное совокупности прямых связки аффинного пространства $n+1$ измерений, что позволяет ввести однородные координаты точек. Глава заканчивается рассмотрением проективных преобразований, коллинеаций, двойственности и коррелятивных преобразований.

Во второй главе проективная геометрия строится с помощью основных понятий точки, гиперплоскости (г. плоскость), инцидентности и следующих аксиом: I. Существует г. плоскость, проходящая через точку A и не проходящая через точку B, и г. плоскость, не проходящая ни через A, ни через B. II. Если существуют г. плоскости, проходящие через точки A, B, но не проходящие через D, а всякая г. плоскость, проходящая через A, B, C, содержит D, то C лежит на всякой г. плоскости, содержащей A, B, D. III. На всякой г. плоскости есть точка, принадлежащая всякой г. плоскости, проходящей через точки A, B. IV. Через всякую точку проходит г. плоскость, содержащая всякую общую точку г. плоскостей a, b. V. Существует не менее четырех г. плоскостей, не имеющих общей точки. VI. Никакая г. плоскость не может содержать всех точек.

Отмечается, что такое построение проективной геометрии особенно удобно для изучения поляритета, который определяется как однозначное соответствие между точками (полюсами) и г. плоскостями (полярами), удовлетворяющее условию: если A принадлежит поляре B, то B принадлежит поляре A. Отмечаются свойства поляритета в пространстве над действительным, комплексным и гиперкомплексным полем.

В третьей главе проективная геометрия дополняется основным понятием перпендикулярности двух прямых и следующей системой аксиом: I. Если $a \perp b$, то $b \perp a$ и они пересекаются в одной точке. II. Из точки C прямой c, которая пересекает a, но не перпендикулярна ей, можно опустить на a не более одного перпендикуляра. III. На прямой c, пересекающей a, существуют две точки, не принадлежащие a, из которых можно опустить перпендикуляры на a. IV. Если точки A, B, C лежат на одной прямой и прямая $PE \perp PA$ и PB, то она $\perp$ и PC. V. Если OA и CB не пересекаются, а $OA \perp OB$, $OA \perp OC$ и AB не перпендикулярна OB, то AC не перпендикулярна OC.

Эти аксиомы достаточны для обоснования такой геометрии Клейна над произвольным алгебраическим телом, которая не допускает существования изотропных (т. е. перпендикулярных самим себе прямых). Теорема о пересечении высот треугольника в одной точке характеризует коммутативность тела.

Положив в основу понятия г. плоскости и перпендикулярности г. плоскостей, можно обосновать геометрию Клейна на следующих аксиомах: I. Если $a \perp b$, то $b \perp a$. II. Если г. плоскость $\perp$ двум г. плоскостям пучка, то она $\perp$ и всякой г. плоскости этого пучка. III. В пучке, содержащем данную г. плоскость, существует г. плоскость, перпендикулярная данной. IV. Не существует г. плоскости, которая перпендикулярна всем остальным.

Заменяя IV аксиомой «Существует единственная г. плоскость, перпендикулярная всем остальным», мож-

но обосновать евклидову геометрию над произвольным алгебраическим телом. А. П. Норден

6781. **Развитие аксиомы конгруэнции треугольников. Некулча** (Extensions de l'axiome de congruence des triangles dans le plan. Neculcea M.), Rev. math. et phys., Bucureşti, 1954, **2**, 133—137 (франц.)

Показано, что аксиома III_5' из системы аксиом Гильберта может быть ослаблена и сформулирована так: Если имеется фиксированный треугольник ABC и произвольная пара треугольников abc и $a'b'c'$ (отличных от фиксированного), у которых $ab \equiv a'b'$, $ac \equiv a'c'$, $\widehat{bac} = \widehat{b'a'c'}$, то следует $\widehat{abc} \equiv \widehat{a'b'c'}$ и $\widehat{acb} \equiv \widehat{a'c'b'}$. На основании принятой аксиомы можно доказать теорему: Если у двух треугольников $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha\beta \equiv \alpha'\beta'$, $\alpha\gamma \equiv \alpha'\gamma'$ и $\beta\widehat{\alpha}\gamma \equiv \beta'\widehat{\alpha}'\gamma'$, то $\alpha\widehat{\beta}\gamma \equiv \alpha'\widehat{\beta}'\gamma'$ и $\alpha\widehat{\gamma}\beta \equiv \alpha'\widehat{\gamma}'\beta'$. С. И. Зетель

6782. **Эквидистанты линий постоянной геодезической кривизны в планиметрии Лобачевского. Букреев Б. Я.**, Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 4, 133—136

Дается несколько измененный по сравнению с книгой автора (Планиметрия Лобачевского, М.—Л., Гостехиздат, 1951, гл. III, § 15) вывод уравнения эквидистанты линии (k) постоянной кривизны в интерпретации Пуанкаре геометрии Лобачевского. Указывается построение центра окружности, изображающей эту эквидистанту.

Систему эквидистант данной линии (k) и их ортогональных траекторий автор называет эквидистантной сетью относительно (k) и, принимая эту сеть за координатную, находит форму метрики. К. К. Мокрищев

6783. **Общий способ построения изображений на основе проективных преобразований. Смирнов С. А.** В сб.: Методы начертательной геометрии и ее приложения, М., Гостехиздат, 1955, 369—381

Теоретическое обоснование и описание устройства и работы простейшего прибора для построения изображений в перспективе, в параллельной проекции, а также для увеличения или уменьшения данного чертежа. Прибор состоит из куска плоского прозрачного материала (например, восковки) с тремя пересекающимися в одной точке линиями, из которых одна может быть кромкою среза. А. А. Гаршнек

6784. **Маршрутные перспективно-конические координаты и проекции. Петренко А. И.**, Укр. матем. ж., 1955, 7, № 2, 142—159
См. РЖАстр, 1956, 1447.

6785. **К построению очерков поверхностей вращения в аксонометрических проекциях. Джапаридзе И. С.**, Тр. Груз. политехн. ин-та, 1955, № 2, 215—223

Приведен метод построения очерков поверхностей вращения в аксонометрических проекциях, основанный на перспективно-аффинном преобразовании геометрических тел. Этот метод прост и даст возможность сократить построения. А. Р. Зенгин

6786 К. **Курс начертательной геометрии** (Учебник для машиностроит. и механ.-технол. специальностей втузов). **Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А.**, Изд. 9-е. М., Гостехиздат, 1955, 404 стр., илл., 9 р. 10 к.

6787 Д. **О кривых в пространстве Лобачевского. Юсупов Д.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1955

6788 Д. **Применение метода зеркальных преобразований при решении некоторых задач начертательной геометрии. Борисов Д. М.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. инж.-строит. ин-т, Л., 1955

6789 Д. **Преобразование ортогональных проекций во фронтальные аксонометрические проекции. Русишвили О. С.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Груз. политехн. ин-т, Тбилиси, 1955

6790 Д. **Геометрия групповой плоскости и группового пространства эллиптической группы движений. Бочек** (Die Geometrie der Gruppenebene und des Gruppenraumes einer elliptischen Bewegungsgruppe. Boczeck Joachim, Diss. Phil. F., Kiel, 1954, 75 Bl., maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, B, № 17, 1234 (нем.)

6791 Д. **Об объеме симплекса в неевклидовых пространствах. Мюллер** (Über Simplexinhalte in nichteuklidischen Räumen. Müller Paul Friedrich. Diss. Math.— naturwiss. F., Bonn, 1954. 44 Bl. Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, B, № 17, 1234 (нем.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6792. **Формула Тейлора для полинома от многих неизвестных в кольце характеристики $p>0$. Приложение к определению поверхностей, имеющих со своей общей касательной плоскостью касание порядка >2. Бугон** (Formule de Taylor pour un polynome a plusieurs indéterminées sur un anneau de caractéristique $p>0$. Application à la détermination des surfaces ayant avec leur plan tangent générique un contact d'ordre >2. Boughon Pierre), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 7, 720—722 (франц.)

Если f — полином от n неизвестных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ в коммутативном кольце A характеристики $p>0$, то, выбирая n новых неизвестных $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, алгебраически независимых в соответствующем A кольце полиномов, получают формулу

$$f(X_1+Y_1, \ldots, X_n+Y_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathscr{Y}_m(X, Y),$$

где

$$\mathscr{Y}_m = \sum_{a_1+\cdots+a_n=m} Y_1^{a_1}, \ldots, Y_n^{a_n} \frac{\Delta_m f}{\Delta X_1^{a_1}, \ldots, \Delta X_n^{a_n}}.$$

При этом свойства операции Δ_m определяются равенством

$$\frac{\Delta_m}{\Delta X_1^{a_1}, \ldots, \Delta X_n^{a_n}} = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{(\alpha_{i,0})!} \left(\frac{D_0}{DX_i} \right)^{\alpha_{i,0}} \cdots \frac{1}{(\alpha_{i,s_i})!} \left(\frac{D_{s_i}}{DX_i} \right)^{\alpha_{i,s_i}} \right],$$

где

$$a_i = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1} p + \cdots + \alpha_{i,s_i} p^{s_i}, \quad \frac{D_s}{DX_i} = \frac{\Delta_{p^s}}{\Delta X_i^{p^s}},$$

причем

$$\frac{D_s}{DX_i} X_j^m = 0$$

при $j \neq i$, $= m_s X_i^{(m_s-1)p^s}$ при $i=j$, и $m = m_0 + m_1 p + \cdots + m_h p^h$.

Исследование поверхностей, имеющих со своей общей касательной плоскостью касание порядка >2, в своей существенной части эквивалентно исследованию полиномов, для которых $\mathscr{Y}_2 = 0$. Исследуются случаи, когда $p>2$ и $p=2$. В каждом из этих случаев полином

может иметь одну и только одну из четырех форм, которые и приводятся автором. Н. И. Кованцов

6793. О размерности двойного ряда данного линейного ряда. Г е ц ц о (Sulla dimensione della serie doppia di una data serie lineare. G h e z z o S a n t u z z a), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 2, 398—406 (итал.)

Пусть g_n^ρ — линейный ряд размерности ρ, заданный на неприводимой алгебраической кривой. Кастельнуово установил, что наименьшая возможная размерность двойного ряда для g_n^ρ равна $\rho_2 = 3\rho - 1$ и достигается в том и только в том случае, когда кривая C^n, являющаяся проективным образом g_n^ρ в пространстве S_ρ, расположена на поверхности $F_2^{\rho-1}$ порядка $\rho - 1$. В работе показано, что при $\rho > 2$, $n > 2\rho - 1$ условие, необходимое и достаточное для того, чтобы кривая C^n в S_ρ лежала на $F_2^{\rho-1}$, состоит в том, чтобы почти всякое (в алгебраическом смысле) сечение C^n гиперплоскостью принадлежало нормальной рациональной кривой секущей гиперплоскости. В соответствии с этим дается новая формулировка условия Кастельнуово для $\rho > 2$, $n > 2\rho - 1$. В частности, при $\rho = 3$ отсюда вытекает один результат Б. Сегре. В. В. Морозов

6794. Теорема существования алгебраических сплетений II. К и з и н и (Il teorema di esistenza delle trecce algebriche. Nota II. C h i s i n i O s c a r), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954 (1955), **17**, № 6, 307—311 (итал.) Начало см. РЖМат, 1956, 3275.

Рассматривается начальная кривая C_n, имеющая r-кратную точку Y_∞ и $r(n-1)$ двойных точек; непрерывным преобразованием этой кривой могут быть приобретены другие двойные точки, скажем δ-узлов и k точек возврата. Кривая с приобретенными двойными точками обозначается через Q_n^r, а ее специализированная форма, когда из нее выделяются r прямых, через Y_∞ и остаточная кривая n-го порядка обозначается через Q_n. Точки дирамации начальной кривой и ее преобразований отображаются в пространстве $m = n(n-1)$ измерений. Непрерывное преобразование кривой C_n^r считается зависящим от одного действительного параметра; в процессе преобразования узел приобретается при совпадении двух точек дирамации, а точка возврата при совпадении трех точек дирамации. Доказывается предложение: от кривой Q_n^r, имеющей δ узлов и k точек возврата, можно перейти непрерывным преобразованием к другой Q_n^r, вырождающейся в Q_n и r прямых параллельных оси y так, что Q_n опять будет иметь δ узлов и k точек возврата, которые будут предельными точками соответствующих приобретенных элементов ζ_n^r указанный результат возможен при условии (достаточном): $\delta + 2k < [n(n+3)/2] - 3$. Следует отметить, что при последнем условии теорема не утверждает существование кривой n-го порядка с δ узлами и k точками возврата, а лишь связывает ее существование с существованием кривой Q_n^r, имеющей аналогичные приобретенные элементы (РЖМат, 1955, 2836). С. С. Бюшгенс

6795. Теорема существования алгебраических сплетений. III. К и з и н и (Il teorema d'esistenza delle trecce algebriche. C h i s i n i O s c a r), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, **18**, № 1, 8—13 (итал.)

Алгебраическое сплетение строится в связи с кривой γ (на плоскости π_x комплексного переменного x), состоящей из петель, идущих к точкам разветвления алгебраической функции $y(x)$, определяемой уравнением $f(x, y) = 0$. Обычно кривую f относят к таким осям, чтобы несобственная точка оси y не принадлежала кривой; в таком случае $y(x)$ имеет число значений, равное порядку кривой f, и сплетение имеет такое же число нитей. В построении автора существенное значение имеет кривая C_n^2, проходящая r раз через точку Y_∞. Для последующего удобно расширить сплетение кривой C_n^r, приняв во внимание, что кривая γ содержит и r петель, идущих к полюсам функции $y(x)$, находящимся на конечном расстоянии; это будут такие точки x_i, что прямые $x = x_i$ касаются ветви кривой C_n^r, проходящей через точку Y_∞. Доказывается теорема существования: если дано каноническое сплетение кривой C_n^r порядка n, то определенными операциями можно перейти к новому сплетению с δ ветвями, представляющими узлы, и k ветвями, представляющими точки возврата; при условии $\delta + 2k < [n(n+3)/2] - 3$ сплетение, полученное этим способом, будет соответствовать кривой Q_n (тоже порядка n), действительно существующей. С. С. Бюшгенс

6796. Дополнения к теории эквивалентности на алгебраическом многообразии: рациональные эквивалентности. С е в е р и (Complementi alla tecria delle equivalenze sulle varietà algebriche: le equivalenze razionali. S e v e r i F r a n c e s c o), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, **18**, № 5, 443—451 (итал.)

Рассматривая вопросы рациональной эквивалентности на неприводимом алгебраическом многообразии M_r в S_d, автор приходит к заключению, что всякая система рациональной эквивалентности принадлежит к типу систем, названных им элементарными. Последние простейшим образом характеризуются как системы, определенные с точностью до фиксированных компонент многообразиями постоянного уровня $\varphi_1 = c_1, \ldots, \varphi_{r-k} = c_{r-k}$ набора независимых $r - k$ рациональных функций точки M_r, причем упомянутые фиксированные компоненты являются многообразиями неопределенности для функций φ. Каждая такая система с точностью до фиксированных компонент содержится в элементарной проективной рациональной системе, т. е. системе, высекаемой на M_r пересечениями $r - k$ производящих форм порядков $m_1, \ldots, m_{r-k}$ объемлющего пространства S_d. В. В. Морозов

6797. Замечание о многообразии Герарделли. Ц о б е л (A note on the variety of Gherardelli. Z o b e l A.), Quart. J. Math., 1955, **6**, № 22, 143—146 (англ.)

Многообразие Герарделли W — неприводимый неособенный четырехмерник, точки которого однозначно соответствуют плоским криволинейным элементам второго порядка E_2. Алгебраические базисы кривых и трехмерников в W были построены Герарделли (Rend. Reale Accad. d'Italia, 1941, **2**, 821—828). В работе строится минимальный в смысле Севери алгебраический базис для поверхностей в W. Он состоит из четырех поверхностей. В. В. Морозов

6798 К. Плоские алгебраические кривые. П р и м р о з (Plane algebraic curves. P r i m r o s e E r i c John Fyfe. London, Macmillan, 1955, vii, 111 pp., ill., 15 sh), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 273, 7 (англ.)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

6799. О теореме Лиувилля. Костюченко А. Г., Студ. наук праці Київськ. ун-ту, 1955, зб. 16, 13—19

Теорема Лиувилля утверждает: При конформном отображении n-мерного пространства в себя сфера и плоскость переходят в сферу или плоскость. Бляшке дал доказательство этой теоремы для $n = 3$, опираясь на теорему Дюпена о триортогональных системах. Автор распространяет теорему Дюпена и доказательство Бляшке на n-мерное пространство. Н. И. Алексеев

6800. К теории сопряженных систем с равными инвариантами и поверхностей G Гишара-Калапсо. Йонас (Zur Theorie der konjugierten Systeme mit gleichen Invarianten und der Guichard — Calapsoschen G-Flächen. Jonas Hans), Math. Nachr., 1954, **12**, № 1—2, 75—112 (нем.)

При решении уравнения Лапласа

$$x_{\alpha\beta} = ax_\alpha + bx_\beta \tag{1}$$

определяют поверхность, отнесенную к сопряженной системе (α, β). Точки

$$x^{(1)} = x - x_\alpha/b, \quad x^{(2)} = x - x_\beta/a \tag{2}$$

описывают преобразования Лапласа сети (α, β).

Сопряженная сеть x' параллельна к сети x, если

$$x'_\alpha = px_\alpha, \quad x'_\beta = qx_\beta, \tag{3}$$

причем $p_\beta = -a(p-q)$, $q_\alpha = b(p-q)$. Если φ и φ' интегралы (1) и $\varphi'_\alpha = p\varphi_\alpha$, $\varphi'_\beta = q\varphi_\beta$, то бигармоническое преобразование сети x в сопряженную x_1 осуществляется соотношениями

$$x_1 = x - (\varphi/\varphi')\,x'. \tag{4}$$

(Eisenhart L. P., Transformations of surfaces. Princeton 1923; Jonas H., Sitz. Ber. Berliner Math. Ges., 1915, **14**, 96—118; Math. Ann., 1937, **114**, 749—780). Сети x и x_1 гармоничны к конгруэнции прямых пересечения их касательных плоскостей. Соответствующие касательные встречаются в фокусах

$$\hat{x} = x - (\varphi/\varphi_\alpha)\,x_\alpha, \quad \check{x} = x - (\varphi/\varphi_\beta)\,x_\beta \tag{5}$$

последней. Преобразования Лапласа $x^{(1)}$ и $x_1^{(1)}$ связаны между собой бигармоническим преобразованием. Если второе бигармоническое преобразование $x_2 = x - \bar{\varphi}/\bar{\varphi}''x''$, то посредством бигармонических преобразований можно придти через x_1 или через x_2 от x к одной и той же поверхности x^* (теоремы переместительности бигармонических преобразований).

Четыре точки x, x_1, x^*, x_2, составляющие четырехчленный цикл, лежат в одной плоскости $\mathfrak{r}$. Огибающая плоскостей $\mathfrak{r}$ определяет сеть (α, β), производную к сети x. Если сопряженная система (α, β) имеет равные инварианты, то уравнение (1) принимает вид:

$$x_{\alpha\beta} = \theta_\alpha x_\alpha + \theta_\beta x_\beta. \tag{6}$$

Теорема переместительности приводит к геометрическому месту точек x^* на прямой g, проходящей через точку x.

Пучок преобразований x_1 и x_2 определяет вторую прямую g'.

Каждая сеть совокупности g связана с каждой сетью совокупности g' специальным бигармоническим преобразованием. Прямые g, g' пересекаются в точке прикосновения плоскости (g, g') к огибающей $\mathfrak{r}$ этих плоскостей. Прямые g, g', $\mathfrak{r}_\alpha$, $\mathfrak{r}_\beta$ образуют гармоническую четверку.

От сети x приходим к производной сопряженной сети

$$\xi = x - u\xi_1 - v\xi_{11} = \{x, u, v\},$$

где u и v интегралы уравнения (1) (параметры), а $\xi_1 = 1/\nu\,(x_\alpha v_\beta - x_\beta v_\alpha)$, $\xi_{11} = -1/\nu\,(x_\alpha u_\beta - x_\beta u_\alpha)$, $\nu = u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha$, ξ — точка пересечения гармоничных к x конгруэнций, определенных посредством $\varphi = u$ или $\varphi = v$.

1. Две производные сети $\{x, u, v\}$ и $\{x, u, \overline{v}\}$ с общим производным параметром u связаны между собой бигармоническим преобразованием. Четыре производные сети

$$\{x, u, v\},\ \{x, u, \overline{v}\},\ \{x, \overline{u}, \overline{v}\},\ \{x, \overline{u}, v\}$$

образуют четырехчленный цикл.

Сеть x представляет собой сопряженную сеть G или поверхность G Гишара—Калапсо, если каждая из сетей $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ (2) состоит из линий кривизны (Guichard C., C. r. Acad. sci., 1901, **132**, 249—251; Calapso P., Ann. Mat. pura ed appl., 1906, III Ser., **13**, 203—248; Jonas H., Math. Nachr., 1951, **5**, 259—300).

Среди сопряженных сетей, параллельных данной сети G, имеется две с равными инвариантами.

Автор преобразует бигармонически (4) сеть G в сеть G:

$$x_1 = x - 2e^\theta x'/(P+Q), \tag{7}$$

где $P = e^\theta p$, $Q = e^\theta q$, и пять функций x', y', z', P, Q связаны квадратичным соотношением

$$\sum x'^2 = \frac{1+\varkappa}{1} P^2 + \frac{1-\varkappa}{2} Q^2,$$

где $\varkappa$ — характеристическая константа; при $|\varkappa| < 1$ преобразование действительно.

Сети линий кривизны, полученные преобразованием Лапласа из x, являющейся сетью G, связаны с соответствующими сетями линий кривизны, возникшими так же из x_1 посредством преобразования Рибокура. Преобразования поверхностей G друг в друга допускают теорему переместительности. При $\varkappa \neq \varkappa$ четвертая поверхность x^* единственна. Если $\overline{\varkappa} = \varkappa$, то четырехчленный цикл преобразований поверхностей G осуществляется при выполнении начального условия

$$\sum x'x'' = \frac{1+\varkappa}{2} P\overline{P} + \frac{1-\varkappa}{2} Q\overline{Q}. \tag{8}$$

Два преобразования поверхностей G с одним $\varkappa$, подчиненные условию (8), называются ассоциированными. Точка x^* в результате двух последовательных ассоциированных преобразований пробегает прямую g от ее точки x. Два ассоциированные преобразования $x \to x_1$, $x \to x_2$ образуют линейный пучок преобразований, и соответствующие точки заполняют прямую g'. Таким образом одному произвольному преобразованию G соответствует ∞^2 ассоциированных преобразований G.

Прямые g, g' пересекаются в точке прикосновения огибающей $\mathfrak{r}$ плоскостей, содержащих эти прямые. Сеть (α, β) на $\mathfrak{r}$ состоит из линий кривизны, касательные к которым делят пополам угол между прямыми g и g'. Косинус этого угла равен $-\varkappa$.

Лучи x, x_1, соединяющие соответствующие точки двух поверхностей G, образуют циклическую конгруэнцию с действительной циклической системой для $|\varkappa| < 1$. Поверхности, нормальные к окружностям системы, суть поверхности $\mathfrak{r}$. Касательная плоскость такой поверхности содержит прямые $g \equiv x\mathfrak{r}$, $g' \equiv x_1\mathfrak{r}$, симметрично наклоненные под постоянным углом к

касательным линий кривизны. Эти касательные встречаются с лучом $x x_1$ в его фокусах. К. Н. Тихоцкий

6801. О конгруэнциях W, принадлежащих линейному комплексу. Клапка (O kongruencích W obsažených v lineárním komplexu. Klapka Jiří), Sbor. Vysoké školy stavit. Brno, 1955, 4, № 2, 107—110 (чеш.; рез. русс., франц.)

Доказана теорема: Если конгруэнция W с нелинейчатыми фокальными поверхностями переводит флекнодальные одной фокальной поверхности в флекнодальные другой фокальной поверхности, то конгруэнция принадлежит линейному комплексу. С. П. Фиников

6802. Плоские конгруэнции конических сечений, имеющие не более двух фокусов. Лагранж (Les congruences planes de coniques qui n'ont que deux points focaux. Lagrange René), Acta math., 1955, 93, № 3—4, 257—292 (франц.)

Рассматриваются в плоскости конгруэнции линий второго порядка, имеющих не более двух подвижных фокусов; полученные результаты прилагаются к теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматривается конгруэнция алгебраических кривых, лежащих в одной плоскости, и даются оценки для верхней границы числа подвижных фокусов на них. Число N подвижных фокусов, различных или совпадающих, четно, и жанр алгебраической кривой C не превосходит $N/4$. Единственными конгруэнциями алгебраических кривых на плоскости, имеющих не более двух простых подвижных фокусов, будут конгруэнции уникурсальных кривых без кратных подвижных точек.

Если алгебраическая кривая C конгруэнции имеет подвижный кратный фокус, дифференциальное уравнение фокальных семейств в этой точке вообще исчезает и точка, если она является регулярной для C, перемещается по кривой. Затем рассматриваются конгруэнции линий c^2, проходящих через две фиксированные точки. Определяется фокальная прямая (проходящая через подвижные фокусы линии c^2 конгруэнции) и уравнения фокальных семейств. Полученные формулы прилагаются к теории обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка $dy/dx = z(x; y)$.

В каждой точке плоскости $A(x, y)$ строится линия c^2 так, чтобы она проходила через две фиксированные несобственные точки ω, ω' и через точку $A(x, y)$ и имела в ней соприкосновение 2-го порядка с интегральной кривой уравнения $dy/dx = z(x; y)$.

Все фокусы A' дифференциальных уравнений $dy/dx = G(z(x; y))$, при переменном виде функции G, присоединенные к одной и той же точке A, расположены на одной и той же прямой (общей фокальной прямой всех этих уравнений).

Все уравнения $dy/dx = G(z(x; y))$, где G определяется из условия $G'(z) = \varphi(1; G)/\varphi(1; z)$, присоединены в каждой точке A к пучку линий c^2, соприкасающихся к их интегральным кривым в точке A, у которых две общие точки (помимо фиксированных точек ω, ω') суть фокусы, общие всем линиям c^2 пучка.

Дифференциальные уравнения, у которых фокальные прямые образуют однопараметрическое семейство, суть уравнения Лагранжа; в частности, если фокальные прямые проходят через фиксированную точку, взятую за начало ($x = 0$, $y = 0$), то уравнения однородны.

Наконец рассматриваются конгруэнции линий c^2, проходящих через две фиксированные несобственные точки, у которых один из фокусов (или два) перемещается по кривой.

Если конгруэнция соприкасающихся линий c^2, присоединенная к уравнению $dy/dx = z(x; y)$, имеет все вторые фокусы на кривой, то она состоит из простой бесконечности пучков касающихся линий c^2.

Н. Г. Туганов

6803. О некоторых тройках кривых на линейчатых поверхностях. Барнер (Über gewisse Kurventripel auf Regelflächen. Barner Martin), Arch. Math., 1955, 6, № 3, 223—229 (нем.)

Рассматриваются тройки кривых на линейчатых поверхностях трехмерного проективного пространства, обладающие следующим свойством: каждая из трех пар кривых, которые можно образовать из этой тройки, допускает общий проективно инвариантный параметр. Такие тройки кривых называют ассоциированными.

Автор пользуется отображением линейчатой (неразвертывающейся) поверхности на вспомогательную гиперболическую плоскость. При этом криволинейные асимптотические отображаются в точки конического сечения (абсолюта гиперболической геометрии). Кривая l, пересекающая каждую образующую в одной точке, отображается в точку, движущуюся по этому коническому сечению в зависимости от параметра образующих. В самом деле: пусть семейство образующих зависит от параметра u, и кривая пересекает образующую u_0 в некоторой точке. Через эту точку проходит криволинейная асимптотическая, которой соответствует точка A_0 конического сечения. Двигаясь по кривой l, получим движение точки $A(u)$ по коническому сечению. Паре кривых l_1 и l_2 соответствует кривая на гиперболической плоскости, вычерченная точкой пересечения касательных к двум подвижным точкам конического сечения, изображающим кривые пары. Пересечение образующими устанавливает точечное соответствие кривых пары. Пара допускает общий инвариантный параметр тогда и только тогда, когда ее образ есть окружность кривизны 1/2. При отображении этот параметр соответствует гиперболической длине дуги окружности. Каждая из трех пар кривых, образуемых из какой-либо тройки, определяет подвижную точку на плоскости, и таким образом вся тройка — подвижный треугольник, стороны которого касаются абсолюта. Доказано: если при некотором движении треугольника гиперболической плоскости стороны его касаются абсолюта и вершины описывают дуги гиперболически равной длины, то движение есть вращение, и вершины движутся по одному и тому же кругу кривизны 1/2. Так находятся все ассоциированные тройки.

Из следствий, полученных из этих теорем, отметим следующее: инвариантный параметр пары кривых инвариантен относительно преобразований линейчатой поверхности, оставляющих асимптотические линии инвариантными, в частности относительно проективного изгибания поверхности. Д. В. Беклемишев

6804. Венок Дарбу из надламываемых сетей, состоящих из четырехугольников. Зауэр (Darboux-Kranz verknickbarer Viereckgitter. Sauer Robert), Arch. Math., 1955, 6, № 3, 180—184 (нем.)

Это одна из серии статей автора, посвященных возможностям иллюстрировать некоторые факты дифференциальной геометрии посредством моделей разностной геометрии. В данном случае создается аналог конфигурации из двенадцати поверхностей, которую ввел Дарбу в теорию изгибания (Darboux G., Théorie générale des surfaces, Gauthier — Villars 1896, IV, 48—86). Аналогом поверхности с двумя семействами кривых на ней избирается сеть из четырехугольников, элементы которых удовлетворяют известным условиям. Так, например, в случае плоских четырехугольников сеть будет соответствовать поверхности с двумя семействами сопряженных кривых. Затем назначаются 3 вида соответствий между сетями, а также допускаемые инфинитезимальные надломы (изгибания) сеток, посредством которых, исходя из какой-нибудь заранее заданной сети, получается 12 четырехугольных сетей, аналогичных упомянутым поверхностям. А. А. Гаршнек

6805. Пары комплексов проективного вращения. К о в а н ц о в Н. И., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 5, 863—866

Среди линейчатых поверхностей комплекса выделяются поверхности, определяемые уравнением, аналогичным характеристическому уравнению поверхностей второго порядка. Такие поверхности автор называет главными поверхностями. Комплекс с двумя равными корнями характеристического уравнения называется комплексом проективного вращения. Двум равным корням соответствует бесконечная совокупность главных поверхностей $\{F\}$, а третьему корню соответствует одна главная поверхность, не входящая в совокупность $\{F\}$. Построив канонический репер $A_1A_2A_3A_4$, в котором A_1A_2 описывает комплекс проективного вращения, автор отмечает, что A_3A_4 также описывает комплекс проективного вращения. Дальше даются следующие теоремы:

Т е о р е м а 1. Каждая из главных поверхностей совокупности $\{F\}$ принадлежит пучку линейных комплексов, уравнение которого в плюккеровых координатах относительно подвижного репера имеет вид $p_{14} - p_{23} + \nu(p_{13} - p_{24}) = 0$.

Т е о р е м а 2. Когда луч комплекса K описывает главную поверхность из совокупности $\{F\}$, тогда луч комплекса $\overline{K}$ описывает главную поверхность из совокупности $\{\overline{F}\}$.

Т е о р е м а 3. Двум проективно-перпендикулярным поверхностям из совокупности $\{F\}$ главных поверхностей комплекса K соответствуют две проективно-перпендикулярные поверхности из совокупности $\{\overline{F}\}$ главных поверхностей комплекса $\overline{K}$. Здесь комплекс K описан ребром A_1A_2, а комплекс $\overline{K}$ описан ребром A_3A_4.

Н. И. Алексеев

6806. Два предложения о граничных точках и фокусах неголономной конгруэнции. К о в а н ц о в Н. И., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 113—116

Неголономной поверхностью называют совокупность интегральных кривых уравнения $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, проходящих через точку пространства, при невыполнении условия полной интегрируемости. Автор называет неголономной конгруэнцией совокупность прямых (P, Q, R), ортогональных к интегральным кривым неголономной поверхности. Гауссова кривизна K_h неголономной поверхности определяется как отношение элемента площади ее сферического отображения к элементу площади самой поверхности, полная кривизна K_i — как произведение экстремальных нормальных кривизн. Доказываются два предложения.

1. Произведения гауссовой кривизны неголономной поверхности на расстояния граничных точек нормальной к ней неголономной конгруэнции от указанной поверхности равны экстремальным кривизнам.

2. Если обозначить ρ расстояния от неголономной поверхности до фокусов нормальной к ней неголономной конгруэнции, то $\rho^2 K_h - \rho H + 1 = 0$, где H — средняя кривизна неголономной поверхности.

Как указывает автор, второе предложение было ранее получено Я. П. Бланком и Д. М. Синцовым (Сообщ. Харьковск. о-ва, 1928, 2, № 4, 75—79).

Я. П. Бланк

6807. О проективном изгибании поверхностей в трехмерных пространствах проективной связности. М у р а к к и н и (Sulla applicabilità proiettiva delle superficie negli spazi a connessione proiettiva a tre dimensioni. M u r a c c h i n i L u i g i), Чехосл. матем. ж., 1955, 5(80), № 2, 274—288 (итал.; рез. русс.)

Соответствие $\varkappa$ между поверхностями Σ и $\overline{\Sigma}$, погруженными соответственно в пространства проективной связности P_3 и $\overline{P}_3$, называется проективным изгибанием, если для каждой пары точек $P \subset \Sigma$ и $\overline{P} \subset \overline{\Sigma}$ можно указать гомографическое преобразование, превращающее касательное к P_3 в точке P обычное проективное пространство S_3 в такое же пространство $\overline{S}_3$ (касательное к $\overline{P}_3$ в $\overline{P}$), причем получается геометрическое касание второго порядка тангенциальных образов любой пары соответствующих элементов $E_2 \supset P$ и $\overline{E}_2 \supset \overline{P}$ поверхностей Σ и $\overline{\Sigma}$. Такое определение проективного изгибания эквивалентно введенному ранее Бомпьяни (Bompiani E., Rend. Acc. Naz. Lincei, 1950, (8), 8, 271—275), но оказывается более удобным при применении метода внешних форм. Если проективная связность в P_3 задается линейными формами ω_α^β, а в $\overline{P}_3$ — формами τ_α^β, то задача определения налагающихся поверхностей сводится к системе уравнений Пфаффа:

$$\begin{gathered}
\omega_0^1 = \tau_0^1,\ \omega_0^2 = \tau_0^2,\ \omega_0^3 = \tau_0^3 = 0,\\
\tau_1^3 = \omega_1^3 + h\omega_0^2,\ \tau_2^3 = \omega_2^3 - h\omega_0^1,\\
\tau_2^1 = \omega_2^1 - k\omega_0^1 + \lambda_2\omega_0^1,\ \tau_1^2 = \omega_1^2 + l\omega_0^2 + \lambda_1\omega_0^2, \qquad (1)\\
\tau_1^1 - \tau_0^0 = \omega_1^1 - \omega_0^0 + k\omega_0^2 + 2\lambda_1\omega_0^1 + \lambda_2\omega_0^2,\\
\tau_2^2 - \tau_0^0 = \omega_2^2 - \omega_0^0 - l\omega_0^1 + \lambda_1\omega_0^1 + 2\lambda_2\omega_0^2,
\end{gathered}$$

где $2h = R^3_{012} - \overline{R}^3_{012}$, $2l = R^2_{012} - \overline{R}^2_{012}$, $2k = R^1_{012} - \overline{R}^1_{012}$, а R^i_{0jk}, $\overline{R}^i_{0jk}$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$ — компоненты тензоров кручения пространств P_3 и $\overline{P}_3$. Рассмотрение этой системы показывает, что при проективном изгибании сохраняются не только асимптотические линии поверхности, но и линии одного из двух семейств, являющихся обобщением линий Дарбу (эти два семейства сливаются в одно, если P_3 без кручения); дополнительное требование сохранения и второго семейства обобщенных линий Дарбу равносильно требованию сохранения проективитета сопряженных направлений. Так как всегда существуют гомографии, переводящие P_3 в P_3^* с сохранением проективного параллельного перенесения, то рассматриваемая задача сводится к рассмотрению такой же задачи в частном случае нормальных пространств проективной связности без кручения ($R^i_{0jk} = 0$, $R^k_{ijk} = 0$). В этом случае система (1) упрощается и исследование условий интегрируемости приводит к заключению: пара проективно наложимых поверхностей Σ и $\overline{\Sigma}$ (без параболических точек), принадлежащих соответственно нормальным пространствам P_3 и $\overline{P}_3$ проективной связности без кручения, определяется с произволом одной функции двух аргументов. Отсюда возникает предположение, что для всякой заданной в P_3 поверхности Σ без параболических точек можно найти проективно наложимую на нее поверхность $\overline{\Sigma}$ в $\overline{P}_3$. Это предположение проверяется для случая, когда P_3 — обыкновенное проективное пространство. Тем самым открывается возможность распространить на теорию поверхностей пространства проективной связности все инвариантные относительно проективного изгибания понятия теории поверхностей обычного проективного пространства. Р. Н. Щербаков

6808. Об одном обобщении понятия асимптотических линий поверхности. Б а к к е с (Sur une extension de la notion d'asymptotique d'une surface. B a c k e s F.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 7, 723—733 (франц.)

Если сфера радиуса $\rho(u, v)$ касается поверхности $P(u, v)$ в точке P, а ее характеристика в направлении dv/du касается направления $\delta v/\delta u$, то имеет место соотношение $(E - \rho L)\,du\,\delta u + (F - \rho M)(du\,\delta v + dv\delta u) + (G - \rho N)\,dv\delta v = 0$. Если рассматривать это соотношение как обобщение условия сопряженности, то при $dv/du = \delta v/\delta u$ мы получим сеть A_ρ, которую можно рассматривать как обобщение сети асимптотических линий поверхности. Рассматриваются частные случаи сетей A_ρ и их соответствия на двух поверхностях. Конгруэнция окружностей, имеющая фокальные сферы и по крайней мере 2 нормальные поверхности, характеризуется тем, что на этих поверхностях получаются сети A_ρ, соответствующие друг другу. Последнее предложение доказывается при помощи частично ортогонального пентасферического репера (Backes F., Mém. Acad. roy. Belgique, 1951, **26**, № 2). Р. Н. Щербаков

6809 К. Введение в дифференциальную геометрию. Хаантьес (Inleiding tot de Differentiaalmeetkunde. Haantjes J., P. Noordhoff N. V., Groningen-Djakarta, 1954, V + 173 pp. 7.50 florins; bound, 9,50 florins) (голл.)

Эта книга представляет введение в классическую дифференциальную геометрию кривых и поверхностей в евклидовом трехмерном пространстве с помощью векторного и тензорного исчислений. В ее семи главах мы находим не только ясную и понятную экспозицию таких тем, как формулы Френе, уравнения Гаусса — Кодацци и теоремы Гаусса — Бонне, но также и краткое, но точное изложение элементов векторного и тензорного анализа. Эти методы введены только там, где они нужны для геометрических доказательств. Некоторые специальные черты состоят в очерке теоремы существования Бонне для поверхностей с данными первым и вторым фундаментальным тензором и в выводе теоремы Гаусса — Бонне, основанном на рассмотрении треугольника, две стороны которого геодезические.

Имеется более 100 задач с указаниями к их решениям в конце и 35 иллюстраций. D. J. Struik

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 984

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

6810. Геометрия подмногообразий многомерного евклидова пространства. Чжэнь Шэн-шэнь (La gèomètrie des sous-variétés d'un espace euclidien à plusieurs dimensions. Chern Shiing-Shen), Enseign. math., 1951—1954 (1955), 40, 26—46 (франц.)

Обзорный доклад о применении тангенциальных отображений в ряде вопросов дифференциальной геометрии. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие $(n + N)$-мерного пространства E и O — фиксированная точка этого пространства. Пусть, далее, $\tau(x)$ — касательная плоскость к M в точке $x \in M$, а $T(x)$ — параллельная ей плоскость, проходящая через точку O. Соответствие $x \to T(x)$ определяет отображение многообразия M в грассманово многообразие $G(n, N)$ (состоящее из всех n-мерных плоскостей пространства E, проходящих через точку O); это отображение и называется тангенциальным. В случае ориентируемого многообразия имеется также тангенциальное отображение многообразия M в понтрягинское многообразие (состоящее из n-мерных ориентированных плоскостей, проходящих через точку O).

Первая глава доклада посвящена рассмотрению характеристических циклов Штифеля — Уитни, Понтрягина и автора, т. е. посвящена рассмотрению важнейших топологических инвариантов тангенциального отображения. Даны дифференциально-геометрические применения (интерпретация классов Понтрягина с помощью дифференциальных форм, формула Гаусса—Боннэ и др.). Во второй и третьей главах приведены разные частные вопросы, связанные с тангенциальным отображением.

Доклад завершается следующими проблемами: 1) Существуют ли в четырехмерном евклидовом пространстве две гомеоморфные между собой гладкие (двумерные) поверхности, не являющиеся регулярно гомотопными? 2) Найти необходимые условия для того, чтобы заданное отображение $M \to G(n, N)$ могло быть тангенциальным (простое необходимое условие дано во второй главе доклада); 3) Существует ли в четырехмерном евклидовом пространстве компактная (двумерная) поверхность, гауссова кривизна которой во всех точках отрицательна? В. Г. Болтянский

6811. Об изометрии в однородном римановом пространстве. Курита (On the isometry of a homogeneous Riemann space. Kurita Minoru), Tensor (N. S.), 1954, **3**, 91—100 (англ.)

Основная теорема статьи указывает типы однородных n-мерных римановых пространств, у которых группа изотропии индуцирует в касательном пространстве группу линейных преобразований, оставляющую фиксированным каждый отдельный вектор в $(n - k)$-мерном подпространстве и представляющую полную группу вращений в его ортогональном дополнении. Вводятся четыре типа пространств, один из которых содержит локально плоское многообразие, в то время как два других включают пространства постоянной кривизны. A. Nijenhuis

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 72

6812. О дробно-квадратичном интеграле геодезических линий пространства аффинной связности. Писарева Н. М., Матем. сб., 1955, 36(78), № 1, 169—200

Исследуются пространства аффинной связности A_n, допускающие дробно-квадратичный интеграл $a_{ij}du^i du^j / b_{ij}du^i du^j = C$ геодезических линий.

1) Для того чтобы тензоры a_{ij} и b_{ij} определяли дробно-квадратичный интеграл геодезических линий двумерного A_2, необходимо и достаточно, а) чтобы эти тензоры и какой-либо третий, представляющий их линейную комбинацию, определяли геодезические сети A_2 или b) чтобы $a_{(ij,\,k)} = a_{(ij}N_{k)}$; $b_{(ij,\,k)} = b_{(ij}N_{k)}$, где N_k — некоторый вектор, а запятая означает ковариантную производную в связности A_2.

2) Для того, чтобы геодезические линии A_2 допускали дробно-квадратичный интеграл, необходимо и достаточно, чтобы в A_2 существовали 2 геодезические сети, чебышевские векторы которых отличаются на градиент некоторой функции.

3) Для того, чтобы $a_{ij}du^i du^j / b_{ij}du^i du^j = C$, где $\mathrm{Det}\,|a_{ij}| / \mathrm{Det}\,|b_{ij}| = \mathrm{const}$, представляло дробно-квадратичный интеграл геодезических, необходимо и достаточно, чтобы a_{ij} и b_{ij} определяли две особенные геодезические сети (т. е. с одинаковым чебышевским вектором).

Исследуемое A_2 геодезически отображается на пространство Вейля (W_2^Γ) с геодезической градиентной сетью. Во второй части полученные результаты переносятся на n-мерный случай, причем 1) и 2) повторяются дословно, если заменить геодезические сети на геодезические поля конусов пространства A_n. Для обобщения 3) вводится понятие проективно-метрического поля конусов, являющегося в присоединенной связности $(\tilde\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + {}^1\!/_2 t_k \delta^i_j + {}^1\!/_2 t_j \delta^i_k)$ метрическим $(a_{ij,\,k} = a_{ij}N_k)$ и выводится тензорный признак проек-

тивно-метрического поля конусов:

$$na_{ij,\,k} = n/2\,(t_i a_{kj} + t_j a_{ki}) + (a_{\alpha\beta,\,k} a^{\alpha\beta} - t_k)\,a_{ij},$$

где t_i — чебышевский вектор поля конусов.

Обобщается известный признак приводимых римановых пространств на пространства Вейля W_n: для того чтобы W_n было приводимым (т. е. имело l взаимно ортогональных систем вполне геодезических поверхностей), необходимо и достаточно, чтобы существовал симметрический тензор a_{ij}, отличный от метрического g_{ij}, для которого $a_{ij,\,k} = a_{ij}\omega_k$, где ω_k определяется из $g_{ij,\,k} = g_{ij}\omega_k$. При $l > 2$ приводимое W_n есть риманово V_n, а при $l = 2$ каждая поверхность из двух систем вполне геодезических поверхностей является римановым пространством, хотя в целом W_n может быть отлично от V_n. Библ. 19 назв. Г. И. Кручкович

6813. **Об однородном пространстве с инвариантной аффинной связностью. Исихара, Обата** (On a homogeneous space with invariant affine connection. Ishihara Shigeru, Obata Morio), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 7, 421—425 (англ.)

Рассматривается приводимое однородное пространство G/H. В этом случае в алгебре Ли существует плоскость m, инвариантная относительно присоединенной группы, отвечающей H, и дополняющая подалгебру h до всей алгебры g. Формулируется свойство (А): а) присоединенное представление h в m полупростое; б) не существует нулевого вектора в m, инвариантного относительно h; в) если m_1 инвариантно относительно h и m_2 дополняет m_1 до h и тоже инвариантно относительно h, то $h = h_1 + h_2$, где h_i — ядро присоединенного представления h в m_i.

В теореме 1 доказывается, что свойство (А) достаточно для того, чтобы однородное пространство аффинной связности распадалось в прямое произведение двух однородных пространств аффинной связности. Приводится также необходимое и достаточное условие выполнения пункта б) в свойстве (А), если выполнено а).

Пространство аффинной связности M называется обладающим свойством (В), соответственно (В′), если а) существует аффинное преобразование φ, фиксирующее некоторую точку p из M; б) в касательном пространстве T_p точки p существует базис из собственных векторов линейного преобразования $\tilde{\varphi}$, индуцированного преобразованием φ в T_p; в) $\rho_i\rho_j\rho_k\rho_l^{-1} \neq 1$, если $j \neq k$, соответственно $\rho_i\rho_j\rho_k^{-1} \neq 1$, если $i \neq j$, где ρ_i — собственные значения φ.

Теоремы 2 и 3 доказывают, что если пространство аффинной связности M допускает транзитивную группу аффинных преобразований и обладает свойством (В), то его тензор кривизны R тождественно равен нулю. Если же однородное пространство аффинной связности обладает свойством (В′), то его тензор кручения T — тождественный нуль. Отсюда делается вывод, что если пространство аффинной связности допускает группу аффинных преобразований размерности $\geqslant n^2 + 1$, то, очевидно, оно обладает обоими свойствами (В) и (В′) и, следовательно, является локально-плоским, т. е. $R = 0$, $T = 0$. Следует отметить, что последний результат был доказан еще в 1947 г. И. П. Егоровым (Докл. АН СССР, **57**, № 9, 867—870). Г. И. Кручкович

6814. **О пространствах A_3 постоянной связности. Бадя** (Asupra spațiilor A_3, cu conexiunene constantă. Badea A.), Rev. Univ. «C. I. Parhon» si Politehn. Bucureşti. Ser. ştiinţ. natur., 1955, № 6-7, 61—64 (рум.; рез. русс., франц.)

6815. **О внутреннем определении касательных векторов. Папи** (Sur la définition intrinsèque des vecteurs tangents. Papy Georges), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 1, 19—20 (франц.)

Показывается, что при естественном распространении определения Шевалле (Теория групп Ли, гл. III, § IV, М., 1948) касательных векторов аналитического многообразия на многообразия класса C_1 получаются, независимо от (конечной) размерности n многообразия, бесконечномерные касательные пространства.

В. В. Рыжков

6816. **О кривизне в финслеровой геометрии. Аусленде р** (On curvature in Finsler geometry. Auslander Louis), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **79**, № 2, 378—388 (англ.)

Рассматривается финслерова геометрия в целом. Автор обобщает на финслерово пространство некоторые глобальные теоремы римановой геометрии. Доказывается, что каждое дифференцируемое многообразие имеет нериманову симметрическую метрику. Кроме финслеровой метрики, в том же пространстве вводится индуцированная риманова метрика так, что длина дуги вдоль геодезической финслерова пространства совпадает с длиной дуги ее образа в римановом пространстве. Используя это, автор вводит понятие средней кривизны и доказывает теоремы:

Полное n-мерное финслерово пространство с положительной средней кривизной $\geqslant e^2$ компактно, имеет диаметр, меньший или равный π/e, и допускает конечную фундаментальную группу.

Полное ориентированное безразмерное финслерово пространство положительной средней кривизны односвязно.

Полное односвязное аналитическое финслерово пространство неположительной кривизны гомеоморфно евклидову пространству той же размерности.

Г. И. Кручкович

6817. **О проблеме вложения m-мерного семейства путей в проективное пространство. Гу Чао-хао** (道路空間的安裝問題·谷超豪), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), Acta math. sinica, 1955, **5**, № 3, 369—381 (кит.; рез. русс.)

Поверхность V_m проективного пространства P_n автор называет оснащенной, если в каждой точке задана нормаль первого рода, а нормаль второго рода остается неопределенной. Доказано: Всякое m-мерное семейство путей может быть индуцировано на некоторой оснащенной поверхности в проективном пространстве $n \leqslant (m^2 + 2m)/2$ измерений. Это доказывается сведением к решенной Г. Ф. Лаптевым задаче о реализации m-мерной геометрии аффинной связности на нормализованной поверхности аффинного пространства.

Классом семейства путей называют проективный класс оснащенной поверхности с данным семейством путей. Класс семейства путей равен проективному классу аффинной связности, имеющей данное семейство путей в качестве геодезических линий. Доказано: Если Γ^i_{jk} — компоненты аффинной связности без кручения аффинного класса ν, имеющей данное семейство путей своими геодезическими линиями, то аффинная связность с компонентами $\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j p_k + \delta^i_k p_j$, где p_j — компоненты градиента, имеет аффинный класс ν или $\nu + 1$. Д. В. Беклемишев

6818. **Пространство путей и классы Штифеля—Уитни. Наш** (A path space and the Stiefel-Whitney classes. Nash John), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1955, **41**, № 5, 320—321 (англ.)

Путями на дифференцируемом многообразии M_n называются непрерывные кривые с заданной параметризацией t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Пространство путей, не прохо-

дящих дважды через свою начальную точку $t=0$, является расслоенным пространством над M_n (с отображением p каждого пути в начальную точку $t=0$). Построением отображения доказывается, что это пространство имеет тот же гомотопический тип (в смысле отображений, сохраняющих расслоение), что и пространство касательных к M_n единичных векторов. Так как определение пространства путей чисто топологическое, это дает новое доказательство топологической инвариантности характеристических классов Штифеля — Уитнея. А. М. Васильев

6819. **О внутренней связности в X_{2n} с почти эрмитовой структурой.** Схоутен, Яно (On an intrinsic connexion in an X_{2n} with an almost Hermitian structure. Schouten J. A., Yano K.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 1, 1—9; Indagationes math., 1955, 17, № 1, 1—9 (англ.)

Рассматривается дифференцируемое многообразие X_{2n} класса C^r. X_{2n} обладает почти комплексной структурой, если в нем задан смешанный тензор 2-й валентности F^j_i, который имеет в действительной системе координат ξ^h действительные компоненты, удовлетворяющие условию

$$F^j_i F^h_j = -A^h_i \quad (i, j, h = 1, \ldots, 2n),$$

где $A^h_i = e^h_{\overset{j}{}}\, e^{\overset{j}{}}_i$, $e^h_{\overset{j}{}}$ и $e^{\overset{j}{}}_i$ — базисные векторы в локальном пространстве E_{2n}. Матрица $F = \| F^i_j \|$ имеет в этом случае собственные значения $+i$ и $-i$. В E_{2n} существуют 2 инвариантные относительно F плоскости E_n.

Экманн и Фрёлихер получили, что X_{2n} с почти комплексной структурой индуцируется структурой обыкновенного комплексного X_n тогда и только тогда, если

$$\Omega^{\overline{\sigma}}_{\mu\lambda} = A^j_{\mu} A^{\overline{i}}_{\lambda} \partial_{[j} A^{\overline{\sigma}}_{\overline{i}]} = 0,$$
$$\Omega^{\sigma}_{\mu\overline{\lambda}} = A^j_{\mu} A^{\overline{i}}_{\overline{\lambda}} \partial_{[j} A^{\sigma}_{\overline{i}]} = 0$$
$$(\sigma, \mu, \lambda = 1, \ldots, n;\ \overline{\sigma}, \overline{\mu}, \overline{\lambda} = \overline{1}, \ldots, \overline{n}).$$

Авторы показывают, что условие этой теоремы можно заменить обращением в нуль тензора N^h_{ij}:

$$N^h_{ij} = 8\Omega^{\overline{\sigma}}_{\mu\lambda} B^{\mu}_i B^{\lambda}_j C^h_{\overline{\sigma}} + 8\Omega^{\sigma}_{\mu\overline{\lambda}} C^{\overline{\mu}}_i C^{\overline{\lambda}}_j B^h_{\sigma},$$

где $B^h_i = e^{\sigma}_{i\sigma} e^h_{\sigma}$, $C^h_{\overline{i}} = e^{\overline{\sigma}}_{\overline{i}} e^h_{\overline{\sigma}}$. $N^h_{ij} = 0$ в том и только в том случае, если существуют m векторных полей U_i таких, что их роторы $U_{ij} = 2\partial_{[i} U_{j]}$ и роторы преобразованных с помощью F векторов $v_i = F^h_i U_h$ являются смешанными (т. е. не лежат своими компонентами только в одном из инвариантных E_n), и если среди этих $2m$ векторных полей $2n$ линейно независимы. Почти комплексное X_{2n} называется почти эрмитовым, если введен симметрический тензор g_{ij} ранга $2n$ и класса C^{r-1}, удовлетворяющий условию $F^k_i F^j_h g_{kj} = g_{ih}$. В этом случае $F_{ih} = g_{ij} F^j_h$ является бивектором. Строится связность, удовлетворяющая условиям: а) связность метрическая: $\nabla_j g_{ih} = 0$, б) плоскости E_n инвариантны: $\nabla_j F_{ih} = 0$, в) в каждом инвариантном R_2 существует инфинитезимальный параллелограмм. Показывается единственность указанной связности.

Г. П. Кручкович

6820. **О группах проективных коллинеаций в пространстве K-протяжений.** Яно, Хирамацу (On groups of projective collineations in a space of K-spreads. Yano Kentaro, Hiramatu Hitosi), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 2, 131—150 (англ.)

Рассматривается пространство K-протяжений (K-spreads) Дугласа (Douglas J., Math. Ann., 1931, 105, 707—733)

$$\partial^2 x^i / \partial u^{\beta} \partial u^{\gamma} + H^i_{\beta\gamma}(x, p) = 0 \quad (p^i_{\alpha} = \partial x^i / \partial u^{\alpha})$$
$$\begin{pmatrix} i = 1, \ldots, N \\ \alpha = 1, \ldots, K \end{pmatrix}.$$

В предшествующей работе авторы (Compositio math., 1952, 10, 286—296), применив метод подвижного репера Картана и используя полунатуральные реперы, нашли нормальную проективную связность в пространстве элементов (x, p), по отношению к которой K-протяжения являются вполне геодезическими подпространствами. Компоненты этой связности

$$\Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{N-K} p^i_{\alpha} \left\{ \Gamma^{\alpha}_{jk}|^{\alpha}_{a} - \frac{2}{N+1} \Gamma^{c}_{a\,(j}|^{\alpha}_{k)} \right\},$$

$$\Pi^{0,\alpha}_{ja} = \frac{1}{N+1} \Pi^{\alpha}_{aj}|^{\alpha}_{k} = \frac{1}{N+1} \Gamma^{\alpha}_{aj}|^{\alpha}_{k},$$

$$\Pi^0_{j\alpha} = \Pi^{0\alpha}_{jk} \Pi^{\alpha}_{bk} p^b_{\alpha} - \frac{1}{N^2-1} (N\Pi^{\alpha}_{jka} + \Pi^{\alpha}_{kja}),$$

где

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{K(K+1)} H^i_{\alpha\beta}|^{\alpha}_{j}|^{\beta}_{k},$$

$$\frac{1}{2} \Pi^i_{jkl} = \Pi^i_{j\,[k,\,l]} - \Pi^i_{j\,[k}|^{\alpha}_{|\,a\,|} \Pi^a_{l]\,b} p^b_{\alpha} + \Pi^a_{j\,[k} \Pi^i_{l]\,a},$$

$$\frac{\partial}{\partial p^k_{\alpha}} = |^{\alpha}_{k},\ \partial / \partial x^k =,\ k,$$

используются при исследовании поставленного вопроса вместо обычно применяемых компонент проективной связности

$$\Pi^{*i}_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{2}{N+1} \delta^i_{(j} \Gamma^{a}_{k)\,a} -$$
$$- \frac{1}{N-K} p^i_{\lambda} \left\{ \Gamma^{a}_{jk}|^{\lambda}_{a} - \frac{2}{N+1} \Gamma^{a}_{a\,(j}|^{\lambda}_{k)} \right\},$$

введенных Дугласом согласно Томасу (T. Y. Thomas).

Поскольку закон преобразования Π^{*i}_{jk} сложнее, чем Π^0_{jk} (тензор) и Π^i_{jk} (объект аффинной связности), применение последних объектов облегчает исследование, для подготовки проведения которого введено ковариантное дифференцирование в связности Π^i_{jk}, обозначаемое $\ll;\gg$, найдены тензоры кривизны P и установлены необходимые для дальнейшего тождества.

С помощью производной Ли, обозначаемой автором символом X, найдены необходимые и достаточные условия того, что инфинитезимальное точечное преобразование $\overline{x^i} = x^i + \xi^i(x)\, d\tau$ является проективной коллинеацией, т. е. K-протяжение переводит в K-протяжение. Автор исходит из требования проективной эквивалентности соответствующих нормальных проективных связностей и находит условие

$$\Delta\Pi^i_{jk} = \delta^i_j \lambda_k + \delta^i_k \lambda_j, \qquad (1)$$

где λ_k — компоненты ковариантного вектора, однородные функции нулевого измерения относительно p^i_x. Путем исключения λ_k из (1) получены эквивалент-

ные условия

$$X\Pi^{*i}_{jk} = 0, \qquad (2)$$

где объект проективной связности

$$\Pi^{*i}_{jk} = \Pi^{i}_{jk} - \frac{2}{N+1}\delta^{i}_{(j}\Pi^{a}_{k)\,a}.$$

Если выбрать специальную систему координат, в которой $\xi^i = \delta^i_1$, или $\xi^i = x^i$, то из (2) обнаруживается, что в первом случае Π^{*i}_{jk} не зависит от x^1, а во втором случае Π^{*i}_{jk} как функция от x^i является однородной минус первого измерения. Наличие таких систем координат является также и достаточным условием для существования однопараметрической группы проективных коллинеаций. Свойства альтернированного дифференцирования Ли позволяют далее установить, что полный ряд r операторов, порождающих однопараметрические группы проективных коллинеаций, порождает r-параметрическую группу проективных коллинеаций.

В исследовании условий интегрируемости уравнений (1) с помощью использования свойств ковариантного дифференцирования и дифференцирования Ли преодолены значительные вычислительные трудности. Установлено, что необходимые и достаточные условия заключаются в алгебраической совместности систем

$$XP^{i}_{jkl} + 2P^{i}_{j\,[kl]}{}^{\alpha}\lambda_b P^{b}_{\alpha}); m_1; \ldots; m_p = 0$$

$$(XP^{i}_{jkl^{\alpha}}|^{\alpha_1}_{l_1}|^{\alpha_2}_{l_2}\cdots|^{\alpha_s}_{l_s}); m_1; \ldots; m_t = 0 \ (p,\ t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

относительно $N(N+2)$ переменных ξ^i, $\xi^i_{;j}$, λ_j, входящих линейно и однородно. Отсюда в зависимости от ранга системы вытекает оценка числа параметров группы проективных коллинеаций, а в частности и условия для проективно плоского пространства.

Б. Л. Лаптев

6821. Некоторые замечания о многообразиях почти комплексной структуры. Яно (Quelques remarques sur les variétés à structure presque complexe. Yano Kentaro), Bull. Soc. math. France, 1955, **83**, № 1, 57—80 (франц.)

Четномерное многообразие имеет почти комплексную структуру, если на нем задано поле тензора F^k_i, удовлетворяющее условию $F^l_i F^k_l = -\delta^k_i$.

В работе излагается ряд найденных различными авторами аналитических и геометрических условий для того, чтобы почти комплексное многообразие было комплексным, а также для того, чтобы почти эрмитово или эрмитово пространство было келеровым. Автор говорит, что его цель — сделать более ясной зависимость между различными типами таких условий. Библ. 35 назв. А. М. Васильев

6822. Об абелевых многообразиях над функциональными полями. Чжоу Вэй-лян (On Abelian varieties over function fields. Chow Wei-liang), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1955, **41**, № 8, 582—586 (англ.)

Предыдущая работа автора (РЖМат, 1956, 2448) дополняется следующим результатом, выражающим свойство K-образа, аналогичное доказанному автором свойству K-следа. Пусть $K(u)$ — регулярное расширение K, A^* — абелево многообразие над $K(u)$, A — K-образ A^* над $K(u)$ и F — канонический гомоморфизм A^* на A. Пусть далее $u_1, \ldots, u_m$ — независимые производящие специализации u над K; $A^*_1, \ldots, A^*_m$ и $F_1, \ldots, F_m$ — соответствующие специализации A^* и F. Тогда, если $(x_1, \ldots, x_m)$ — производящая точка произведения $\Pi^m_1 A^*_i$ над $K(u_1, \ldots, u_m)$ и если m достаточно велико, то соответствие $(x_1, \ldots, x_m) \to \Sigma^m_1 F_i(x_i)$ определяет регулярный гомоморфизм ΠA^*_i на A. Этот результат позволяет в приложениях переходить от канонического гомоморфизма, который может не быть регулярным, к регулярному гомоморфизму. Как следствие из него вытекает, что при любом расширении K_1 поля K, независимом относительно $K(u)$ над K, A и F остаются K_1-образом A^* над $K_1(u)$ и соответствующим каноническим гомоморфизмом.

В. В. Морозов

6823. Келеровы многообразия ограниченного типа (Внутренняя характеристика алгебраических многообразий). Кодаира (On Kähler varieties of restricted type (An intrinsic characterization of algebraic varieties). Kodaira K.), Ann. Math., 1954, **60**, № 1, 28—48 (англ.)

Известно, что любое алгебраическое многообразие без особенностей, вложенное в проективное пространство, является многообразием Ходжа (келеровым многообразием ограниченного типа), т. е. на нем можно определить такую метрику Келера $ds^2 = 2\Sigma g_{\alpha\bar{\beta}}(dz_\alpha dz_\beta)$, что соответствующая внешняя форма $\omega = i\Sigma g_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha d\bar{z}_\beta$ когомологична целочисленному двумерному коциклу. В работе доказано, что, обратно, любое многообразие Ходжа является алгебраическим многообразием без особенностей (точнее, бирегулярно эквивалентно алгебраическому многообразию без особенностей). Метод доказательства следующий. Пусть V — произвольное многообразие Ходжа, F некоторый пучок комплексных линий на V с координатными окрестностями $\{u_j\}$ (РЖМат, 1954, 3272) и $\Gamma(F)$ — линейное пространство всех голоморфных секущих поверхностей пучка F. Пусть $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_d\}$ — некоторый базис пространства $\Gamma(F)$. Любой точке $z \in V$ отнесем точку $\Phi_F(z)$ проективного d-мерного пространства, положив

$$\Phi_F(z) = (\varphi_{0j}(z), \ldots, \varphi_{dj}(z)), \quad z \in U_j,$$

где $\varphi_{\lambda j}(z)$ — координата по слою точки $\varphi_\lambda(z)$, соответствующая координатной окрестности U_j (очевидно, что точка $\Phi_F(z)$ не зависит от U_j). Оказывается, что на многообразии V существует такая действительная (1,1)-форма β, что любого пучка F, характеристический класс которого содержит форму $\gamma > \beta$ (неравенство $\gamma > \beta$ означает, что матрица формы $\gamma - \beta$ положительно определена в любой точке многообразия V), отображение Φ_F взаимно однозначно и бирегулярно. Это утверждение доказывается весьма сложно и его можно рассматривать как основной результат работы. При доказательстве существенно используются некоторые квадратичные преобразования, приводящие многообразие V к виду, удобному для применения общей теории пучков. Так как для достаточно большого h имеет место неравенство $h\omega > \beta$, а любой действительной (1,1)-форме, когомологичной целочисленному коциклу соответствует некоторый пучок (РЖМат, 1954, 3274), то из основного результата немедленно следует вложимость многообразия V в проективное пространство, что доказывает сформулированную в начале реферата теорему.

В качестве простых следствий автор получает много интересных теорем, как например, следующие: 1) если в компактном комплексно аналитическом многообразии V существует эрмитова метрика, тензор

Риччи $R_{\alpha\bar{\beta}} = -\partial^2 \ln g / \partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta$ которой положительно или отрицательно определен, то V является алгебраическим многообразием без особенностей; 2) неразветвленное конечнолистное накрытие алгебраического многообразия без особенностей является алгебраическим многообразием без особенностей; 3) компактная фундаментальная область разрывной группы аналитических автоморфизмов ограниченной области n-мерного комплексного пространства является алгебраическим многообразием без особенностей и т. д.

М. М. Постников

6824. О погружении алгебраических многообразий. Луис (Sur l'immersion des variétés algébriques. Lluis Emilio), Ann. Math., 1955, **62**, № 1, 120—127 (франц.)

Рассматривается r-мерное алгебраическое многообразие V в n-мерном проективном пространстве над полем k. Доказывается, что если V не имеет особых точек, то его можно так спроектировать в проективное пространство размерности $2r+1$, что проектирование будет бирациональным бирегулярным преобразованием. Если V имеет особые точки, то проектирование с аналогичными свойствами возможно в пространство m измерений, где $m = \max(r+d-1,\ 2r+1)$, а d определяется следующим образом. Пусть P — точка V, $\mathfrak{o}$ — локальное кольцо V в точке P, m — максимальный «идеал $\mathfrak{o}$ (определение этих понятий см. Ходж и Пидо «Методы алгебраической геометрии», т. III). Размерность $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ как векторного пространства над полем $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ обозначается через $d(P)$. Тогда $d = \max d(P)$ для всех $P \in V$. Если поле k бесконечно, то проектирование определено над k, а если k конечно, то над некоторым его конечном расширением.

И. Р. Шафаревич

6825. О представлении единой теории поля несимметрическим тензором g_{ik}. Эли (Sur la représentation du champ unitaire par un tenseur g_{ik} non symétrique. Hély Jean), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 9, 645—647 (франц.)

Определяются наиболее простые уравнения, накладываемые на тензор g_{ik}, представляющие единое поле. Пусть g^{ik}, g_{ik} — несимметрические, а f^{ik}, f_{ik} — симметрические тензоры, связанные уравнениями: $g^{ik}g_{il} = f^{ik}f_{il} = \delta^k_l$, R_{ik} — тензор Риччи, образованный при помощи f_{ik}, $S^{ik} \equiv R^{ik} - f^{ik}R/2$, ($R^{ik} = f^{is}f^{kt}R_{st}$, $R = f^{st}R_{st}$), $g \equiv \sqrt{g_{ik}}$, $f \equiv \sqrt{f_{ik}}$ и $h^{ik} = \sqrt{g/f}\,g^{ik}$. Тогда из гипотез: (I) $\underset{\vee}{h^{ik}} = f^{ik}$ и $g_{ik} = \varepsilon f_{ik} + R_{ik}/\lambda$ и (II) $g_{ik} = f_{ik}$, и $\underset{\vee}{h^{ik}} = \varepsilon f^{ik} + \delta^{ik}/\lambda$, где ε, λ — постоянные, следуют уравнения:

$$2g_{li}\,(\sqrt{-f}\,\underset{\vee}{h^{ik}})_{,k} + \sqrt{-f}\,\underset{\vee}{h^{ik}}\,(g_{ik,l} + g_{kl,i} + g_{li,k}) = 0.$$

Если теперь положить первое слагаемое равным нулю, то тензоры g_{ik}, $\underset{\vee}{h^{ik}}$ и $(1/\sqrt{-f})\,(\sqrt{-f}\,\underset{\vee}{h^{ik}})_{,k}$ можно идентифицировать с тензорами B_{ik}, H_{ik}, представляющими, по Борну, электромагнитное поле с плотностью I^i. Если же равно нулю второе слагаемое, то $\sqrt{-g}\,\underset{\vee}{g^{ik}} = \pm B_{lm}$, $g_{ik} = \pm\sqrt{-f}H^{lm}$, $g_{ik,l} + g_{kl,i} + g_{li,k} = \pm\sqrt{-f}\,l^m$, где i, k, l, m обозначают некоторую из перестановок четырех чисел 1, 2, 3, 4. Обращение в нуль g_{ik} приводит, при $\varepsilon = 1$, к пространству Минковского, а при $\varepsilon \neq 1$ к миру де-Ситтера, с космологической константой $\lambda(\varepsilon - 1)$.

А. З. Петров

6826 Д. О геодезическом отображении римановых пространств. Синюков Н. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

6827 Д. Некоторые классы симметрических пространств. Феденко А. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

6828 Д. О геометрии поверхностей многомерного симплектического пространства. Остиану Н. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1955

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

6829. К теории равносоставленности евклидовых многогранников. Хадвигер (Zur Zerlegungstheorie euklidischer Polyeder. Hadwiger H.), Ann. mat. pura ed appl., 1954, **36**, 315—334 (нем.)

Обзор (с доказательствами) теории равносоставленности.

Пусть G — группа движений k-мерного евклидова пространства R^k, содержащая все параллельные переносы. Через A, B, ... обозначаются k-мерные многогранники в R^k. Символ $A \sim B$ означает G-равносоставленность многогранников A и B (РЖМат, 1955, 425). Далее через $A+B$ обозначается объединение многогранников A и B, расположенных так, что они не имеют общих внутренних точек, через nA обозначается сумма $A+A+\cdots+A$ (n слагаемых), а через $A^{(\lambda)}$ — многогранник, получающийся из A подобным преобразованием с коэффициентом λ (обозначения автора несколько иные). Важные свойства символа $\sim$ даются следующими теоремами: Если $A+C \sim B+D$ и $C \sim D$, то $A \sim B$; Если, далее, $nA \sim nB$ (n — натуральное), то $A \sim B$.

Пусть L_1, L_2, ..., L_q — нетривиальные линейные подпространства, в прямую сумму которых разлагается пространство R^k, а k_1, k_2, ..., k_q — их размерности. Выберем в каждом подпространстве L_i некоторый многогранник M_i, $i = 1, \ldots, q$, и пусть N — многогранник, образованный всеми точками вида $x_1 + x_2 + \cdots + x_q$, где $x_i \in M_i$. Каждый многогранник N этого вида автор называет q-квадратным цилиндром. Через K_q обозначается совокупность многогранников, каждый из которых G-равносоставлен с некоторым q-кратным цилиндром. Справедливы следующие две теоремы о классах K_q: 1) Если $A \in K_q$, то для произвольного натурального n имеет место соотношение $A \sim n^q A^{(1/n)} + A'$, где $A' \in K_{q+1}$; 2) Для любого многогранника A можно подобрать такие многогранники A_1, ..., A_k, принадлежащие соответственно классам K_1, ..., K_k, что для любого натурального n имеет место соотношение $A^{(n)} \sim \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i} A_i$.

Каковы бы ни были натуральные числа m, n и многогранник A, соотношение $mX \sim nA$ однозначно, с точностью до G-равносоставленности, разрешимо относительно X. Многогранник X, удовлетворяющий этому отношению, обозначается через nA/m. Если $A \in K_q$, а $p > 0$ — рациональное число, то имеют место соотношения $pA \in K_q$ и $A + A' \sim p^q A(1/p) + A''$, где A', $A'' \in K_{q+1}$. Условимся понимать соотношение $A_1 + A_2 + \cdots - B_1 - B_2 - \cdots \sim C_1 + C_2 + \cdots - D_1 - D_2 - \cdots$ в смысле $A_1 + A_2 + \cdots + D_1 + D_2 + \cdots \sim B_1 + B_2 + \cdots + C_1 + C_2 + \cdots$. Тогда формальные ко-

нечные линейные комбинации $\Sigma_i p_i A_i$, где p_i — рациональные коэффициенты, образуют многообразие, в котором соотношение $\sim$ рефлексивно, симметрично и транзитивно. Переходя к классам эквивалентности, получаем векторное пространство над полем рациональных чисел; оно обозначается через $\hat{K}$.

Пусть p — положительное рациональное число, A — некоторый многогранник. Положим

$$a_{ij} = \begin{cases} p^{i(j-1)} & \text{при } i \leqslant k, \quad j \leqslant k+1, \\ Ap^{(j-1)} & \text{при } i = k+1, \ j \leqslant k+1; \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} \binom{j}{i} & \text{при } i \leqslant k, \quad j \leqslant k+1, \\ A^{(j)} & \text{при } i = k+1, \ j \leqslant k+1. \end{cases}$$

Автор доказывает справедливость детерминантных соотношений $|a_{ij}| \sim 0$, $|b_{ij}| \sim 0$.

Дальнейшая часть статьи посвящена изучению аддитивных G-инвариантных функционалов, т. е. действительных функций f, определенных на множестве всех k-мерных многогранников и обладающих следующими свойствами: 1) если $A \sim B$, то $f(A) = f(B)$; 2) $f(A+B) = f(A) + f(B)$. Для G — равносоставленности двух многогранников необходимо и достаточно, чтобы каждый аддитивный G-инвариантный функционал имел для них одинаковые значения. Аддитивный G-инвариантный функционал χ называется рационально однородным степени ν, если для любого рационального числа $p > 0$ и любого многогранника A имеет место соотношение $\chi(A^{(p)}) = p^{\nu}\chi(A)$. Всякий аддитивный G-инвариантный функционал однозначно представляется в виде суммы рационально однородных функционалов степеней $\leqslant k$. В заключение приведены некоторые теоремы об аддитивных T-инвариантных функционалах, где T — группа всех параллельных переносов.

В. Г. Болтянский

6830. Углы и расстояния в n-мерной евклидовой и неевклидовой геометрии. I. Сейдел (Angles and distances in n-dimensional euclidean and noneuclidean geometry. I. • Seidel J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 3, 329—335; Indagationes math., 1955, **17**, № 3, 329—335 (англ.)

Производится построение неевклидовых геометрий методами линейной алгебры. Рассматриваются действительные линейные пространства с установленным в них внутренним (скалярным) произведением элементов $(a_i, a_j) = a_{ij}$, обладающим обычными свойствами, но в отличие от евклидова пространства (a_i, a_j) может быть $>$, $<$ или $= 0$. Если $(a_i, a_i) > 0$, то элемент a_i собственный, если $(a_i, a_i) = 0$ — несобственный. Подпространство — собственное, если содержит хотя бы один собственный элемент; — несобственное, если его элементы несобственные. Подпространство — полупростое, если в нем нет элемента ($\neq 0$), ортогонального всем его элементам.

Грамиан элементов $a_1, \ldots, a_n$ в дальнейшем обозначается $(a_{ij}) = A$. Грамианы A и Q двух базисов конечномерного подпространства конгруэнтны ($Q = S^T A S$) и имеют одинаковый ранг $\rho(A)$ и одинаковое число $\pi(A)$ положительных и $\nu(A)$ отрицательных элементов в соответствующих диагональных матрицах. Базис всегда может быть выбран ортонормальным, так чтобы грамиан имел диагональную форму и состоял из чисел 1, -1 или 0. Конечное число линейно независимых элементов порождают полупростое пространство в том и только в том случае, если их грамиан неособенный. IH-пространством называется пространство, у которого каждое собственное подпространство полупростое. I-пространство (эллиптическое) это такое, в котором грамиан базисных элементов любого n-мерного подпространства удовлетворяет условию: $\pi(P) = \rho(P) = n$. H-пространство (гиперболическое) определяется условиями: $\rho(P) = n$, $\pi(P) = 1$, либо $\rho(P) = \nu(P) = n$, либо $\rho(P) = \nu(P) = n-1$ соответственно в случаях: собственного либо не являющегося собственным, но полупростого, либо неполупростого подпространства. Всякое IH-пространство является либо I- либо H-пространством.

Рассматриваются подпространства Γ и Δ IH-пространства, определяемые базисами $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$ ($n \geqslant m$), грамиан которых $\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$. Элементы b_k однозначно представляются в виде суммы:

$$b_k = g_k + h_k; \ g_k \in \Gamma, \ h_k \in \Gamma \cup \Delta, \ (a_i, h_k) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n); \ k = 1, \ldots, m)$$

при этом $((g_k, g_e)) = C^T A^{-1} C$ и $((h_k, h_e)) = B - C^T A^{-1} C$. Подпространство Π, определяемое элементами $g_1, \ldots, g_m$, называется проекцией Δ в Γ, а разность размерностей $q = \dim \Delta - \dim \Pi$ — степенью ортогональности Γ и Δ. Γ и Δ — ортогональны, если $q = m$. Подпространство Γ^*, определяемое элементами $h_1, \ldots, h_m$, называется полюсом Γ относительно объединения $\Gamma \cup \Delta$, $p = \dim \Delta - \dim \Gamma^* = \dim \Gamma \cap \Delta$ — степенью пересечения Γ^* и Δ. Доказывается, что если Γ собственное, то полюс Γ^* не является собственным, а если подпространства Γ и Δ — собственные, то и проекция Π — собственное.

Далее Γ и Δ предполагаются собственными, и для исследования их взаимного расположения строятся стандартные базисы, грамиан которых определяется числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, причем $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 1$; $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_{p+q} = 0$, $0 < \lambda_{p+q+1}, \ldots, \lambda_m < 1$ при этом для λ_m последнее неравенство имеет место в случае I-пространства или собственного H-пространства, в случае же пространства, не являющегося собственным, но полупростого $\lambda_m > 1$, в случае неполупростого H-пространства $\lambda_m = 1$.

А. Г. Школьник

6831. Углы и расстояния в n-мерной евклидовой и неевклидовой геометрии. II. Сейдел (Angles and distances in n-dimensional euclidean and noneuclidean geometry. II. Seidel J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 3, 336—340; Indagationes math., 1955, **17**, № 3, 336—340 (англ.)

Продолжение работы под тем же названием (Реф. 6830). Исследуется взаимное расположение подпространств Γ и Δ IH-пространства. Если $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$ — какие-либо базисы Γ и Δ, то любая функция их грамиана $\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$, не зависящая от выбора базисов, называется инвариантом Γ и Δ. Введенные в первой части работы числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ являются корнями уравнения $|\lambda B - C^T A^{-1} C| = 0$ и называются вариантными корнями подпространств Γ и Δ. Числа λ_k вместе с n в I-пространстве и вместе с n и p (размерностью пересечения $\Gamma \cap \Delta$) в H-пространстве составляют полную совокупность инвариантов для Γ и Δ. Отличные от нуля λ_k являются значениями ненулевых инвариантных корней одномерных подпространств из Γ и Δ.

Рассматривается случай, когда пересечение Γ и Δ не является полупростым и содержит несобственный элемент g_1. Базисы Γ и Δ, которые содержат любой базис пересечения $\Gamma \cap \Delta$, включающий элемент g_1, составляют пару g_1-базисов. Любая функция внутренних произведений пары g_1-базисов, не зависящая от их выбора,

называется g_1-инвариантом. Если g_1-базисы, определяющие Γ и Δ:

$$g_1, \ldots, g_p, \quad a_{p+1}, \ldots, a_n \quad \text{и} \quad g_1, \ldots, g_p, \quad b_{p+1}, \ldots, b_m,$$

то выражение

$$\delta(\Gamma, \Delta) = \frac{D(g_1 \ldots g_p a_{p+1} \ldots a_n b_{p+1} \ldots b_m)\, D(g_2 \ldots g_p)}{D(g_1 \ldots g_p a_{p+1} \ldots a_n)\, D(g_1 \ldots g_p b_{p+1} \ldots b_m)},$$

где D — определитель Грамма, является g_1-инвариантом. Инвариантные корни λ_i и $\delta(\Gamma, \Delta)$ составляют полную систему g_1-инвариантов Γ и Δ. Доказывается следующее свойство $\delta(\Gamma, \Delta)$. Если $\varphi \subset \Gamma$ и $\psi \subset \Delta$ — двумерные полупростые подпространства, проходящие через g_1, то

$$\delta(\Gamma, \Delta) = \Pi_i (1 - \lambda_i) \min \delta(\varphi, \psi),$$

где λ_i — инвариантные корни Γ и Δ, не равные 1.

А. Г. Школьник

6832. Проективные плоскости над почти-телами. Андре (Projektive Ebenen über Fastkörpern. André Johannes), Math. Z., 1955, **62**, № 2, 137—160 (нем.)

Изучается недезаргова проективная плоскость π над почти-телом Q. Доказывается, что если почти-тела Q_1 и Q_2 не изоморфны, то плоскости π_1 и π_2, построенные над ними, также не изоморфны. Далее исследуются коллинеации плоскости π. Особо выделяются перспективы или p-L-коллинеации, т. е. коллинеации, оставляющие на месте все точки прямой L и все прямые, проходящие через точку p, а также проективные коллинеации, получаемые как произведение перспектив. Среди полученных результатов следует отметить: 1. Пусть U — несобственная прямая. Скажем, что упорядоченная пара (p, q), $p, q \in U$, допустима, если существует такая собственная прямая H, проходящая через q, что для любых точек $r, s \in U$, $r \neq p, q$, $s \neq p, q$, найдется p-H-коллинеация, переводящая r в s. Оказывается, что для множества Z всех допустимых пар веблен-веддербарновой плоскости имеются следующие возможности: а) Z пусто; б) Z состоит из единственной пары (p, p); в) Z состоит из всевозможных пар вида (p, p); г) Z состоит из двух пар (p, q) и (q, p), $p \neq q$; д) для каждой точки p существует в точности одна точка q, $p \neq q$, такая, что (p, q), $(q, p) \in Z$; никаких других пар в Z нет; е) Z состоит из всех пар. В случае б) плоскость можно координатизировать веблен-веддербарновым телом с обоими дистрибутивными законами, в котором не всегда имеет место $a(ab) = a^2 b$ (*), в случае в) мы приходим к неассоциативному телу, в котором имеет место (*), в случае г) — к неассоциативному почти-телу, содержащему более 9 элементов, в случае д) — к неассоциативному почти-телу Ω из 9 элементов, в случае е) — к телу. Плоскость над Ω называется исключительной. 2. Проективные коллинеации неисключительной плоскости определяются равенствами

$$(x, y) \to (sxa + c, syb + d), \quad (x, y) \to (syb + d, sxa + c),$$

где $s, a, b, c, d \in$ почти-телу Q, над которым построена плоскость, $s, a, b, \neq 0$, $s(p + q) = sp + sq$ для любых $p, q \in Q$. Каждая проективная коллинеация представляется в виде произведения не более, чем 4 перспектив. 3. Группа $\mathfrak{U}$ коллинеаций неисключительной плоскости однозначно представляется в виде $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}\hat{\mathfrak{N}}\bar{\mathfrak{N}}\mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{T}$ — группа сдвигов, изучавшаяся автором ранее (РЖМат, 1955, 3107), $\hat{\mathfrak{N}}$ изоморфна прямому произведению двух мультипликативных групп тела Q, одна из которых состоит из коллинеаций $\underline{a}$ вида $(x, y)\underline{a} = (xa, y)$, а вторая — из коллинеаций $\bar{a}$ вида $(x, y)\bar{a} = (x, ya)$, где $a \in Q$, $a \neq 0$, $\bar{\mathfrak{N}}$ — группа коллинеаций, оставляющих на месте точки (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), она изоморфна группе автоморфизмов почти-тела Q, $\mathfrak{Z}$ — группа второго порядка, содержащая коллинеацию ε: $(x, y)\varepsilon = (y, x)$. 4. Всякая коллинеация исключительной плоскости представима в одной из форм: $\underline{a}\bar{b}\eta\bar{c}\sigma\tau$, $\underline{a}\bar{b}\sigma\tau$, $\varepsilon\underline{a}\bar{b}\sigma\tau$, где $a, b, c \in \Omega$, $a, b, c \neq 0$, $\sigma \in \hat{\mathfrak{N}}$, $\tau \in \mathfrak{T}$, $\underline{a}, \bar{b}, \hat{\mathfrak{N}}, \bar{\mathfrak{T}}$ имеют тот же смысл, что и в 3, $a\eta = (x - y, x + y)$. —

Еще отметим один алгебраический результат: Ω является единственным почти-телом, которое не является телом и удовлетворяет условию $a^2 = -1$ для всех $a \neq 0, \pm 1$.

Л. А. Скорняков

6833. О теореме Штаудта в плоскости Муфанг. Гавел (On the theorem of Staudt in Moufang plane. Havel Václav), Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 1, 83—90 (англ.; рез. русс.)

Переносится на альтернативные тела теорема Хуа Логена (РЖМат, 1954, 1106) о семигомоморфизмах колец. Отсюда выводится, что в альтернативной плоскости проективитет в смысле Штаудта является проективитетом в смысле Понселе (Скорняков Л. А., Успехи матем. наук, 1951, **6**, № 6, 148). Однако следующий пример показывает ошибочность утверждений автора: пусть k — тело Кэли—Диксона над полем действительных чисел D с единицами $e_0 = 1, e_i$, $i = 1, \ldots, 7$ (Линник Ю. В., Успехи матем. наук, 1949, **4**, № 5, 52). Если положить $f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$, $a, b \in K$, $\lambda, \mu \in D$, $f(e_i) = e_i$, $i = 0,1,2,5,6,7$; $f(e_3) = 4e_3/5 - 3e_4/5$; $f(e_4) = 3e_3/5 + 4e_4/5$, то $f(ab + ba) = f(a) f(b) + f(b) f(a)$, $a, b \in k$, т. е. f оказывается семигомоморфизмом. Но $f(e_1 e_2) = f(e_3) = 4e_3/5 - 3e_4/5 \neq e_3 = e_1 e_2 = f(e_1) f(e_2)$, $f(e_1 e_2) \neq -e_3 = f(e_2) f(e_1)$.

Л. А. Скорняков

6834. Метризация проективной плоскости в связи с данной системой кривых. Скорняков Л. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, **19**, № 6, 471—482

Доказывается, что если на вещественной проективной плоскости задана система кривых, гомеоморфных окружности, причем точки плоскости и кривые системы при естественном определении инцидентности образуют абстрактную проективную плоскость, то в проективную плоскость можно ввести метрику, при которой 1) индуцируется естественная топология проективной плоскости; 2) расстояние между любыми двумя точками не превосходит 1; 3) если расстояние точек A, B равно сумме расстояний точек A, B и B, C, то точки A, B, C лежат на одной кривой семейства; 4) если A и C — различные точки плоскости, то существует точка B, сумма расстояний которой до A и C равна расстоянию точек A, C (условие выпуклости); 5) для всяких двух точек A, B с расстоянием, меньшим 1, и произвольного числа $\varepsilon > 0$ всегда существует число δ, $0 < \delta < \varepsilon$, для которого найдется единственная точка B_δ, расстояние которой до B равно δ, а расстояние которой до A равно сумме расстояний A, B и B, B_δ.

Теорема является обратной для известной теоремы (Busemann H., Metric methods in Finsler spaces and in the foundations of geometry, London, 1942, стр. 19) о том, что в метрическом пространстве, в котором замыкание всякого ограниченного множества компактно при выполнении условия выпуклости и некоторого свойства, вытекающего из 5), любые две точки можно соединить геодезической, для случая двух измерений, когда пространство гомеоморфно проективной плоскости (для другого двумерного случая, когда пространство гомеоморфно евклидовой плоскости, обратная теорема известна (см. там же, стр. 89), так что доказанной здесь теоремой исчерпывается доказательство обратной теоремы для случая двух измерений).

Б. А. Розенфельд

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

6835. О вписанных и описанных многоугольниках выпуклых фигур. Молнар (Konvex tartományok beírt és körülírt poligonjairól. Molnár József), Mat. lapok, 1955, 6, № 2—3, 210—218 (венг.; рез. русс., англ.)

Приводятся доказательства двух теорем:

Теорема 1. Если P_n — n-угольник с максимальным периметром, вписанный в выпуклую фигуру, то периметры удовлетворяют неравенству $P_{n-1} + P_{n+1} \leqslant 2P_n$.

Теорема 2. Если p_n — n-угольник с минимальным периметром, описанный около выпуклой фигуры, то периметры удовлетворяют неравенству $p_{n-1} + p_{n+1} \geqslant 2p_n$.

Обе теоремы и две аналогичные теоремы Даукера, относящиеся к площади, расширяются на гиперболической плоскости и на шаре. Проблема периметра описанного многоугольника на шаре осталась неразрешенной.

Резюме автора

6836. Верхняя и нижняя границы площади треугольника. Битти (Upper and lower estimates for the area of a triangle. Beatty S.), Trans. Roy. Soc. Canada, 1954, Sec. 3, 48, June, 1—5 (англ.)

Доказываются неравенства

$$\frac{(K-H)^2}{12} \geqslant \Delta^2 \geqslant \frac{(K-H)^2}{12} - \frac{(K-H)(2H-K)}{6}$$

для площади Δ треугольника со сторонами a, b, c, причем $H = (a^2+b^2+c^2)/2$ и $K = (ab+bc+ac)$.

Автор исходит из неравенств (Герретсен, РЖМат, 1954, 5729)

$$\frac{K-H}{2} \geqslant \Delta\sqrt{3} \geqslant \frac{K-H}{2} - (2H-K).$$

Первое из рассматриваемых автором неравенств, дающее верхнюю границу для Δ^2, равносильно первому неравенству Герретсена. Второе неравенство, дающее нижнюю границу для Δ^2, является усилением второго неравенства Герретсена. Автор дает его аналитическое доказательство, для чего строит функцию

$$T = \Delta^2 - \frac{(K-H)^2}{12} + \frac{(K-H)(2H-K)}{6}$$

и подвергает ее исследованию на экстремум, указывая ограничения, необходимые для доказательства. Библ. 3 назв.

Н. А. Колмогоров

6837. Некоторые теоремы о поверхностях отрицательной кривизны. Ефимов Н. В., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 1, 101—105

Рассматривается вопрос о связи между радиусом геодезического круга и пространственной искривленностью регулярной трижды непрерывно дифференцируемой поверхности отрицательной кривизны, гауссова кривизна K которой удовлетворяет условию $K \leqslant -1$. Именно, если μ — верхняя грань модуля нормальных кривизн во всех точках геодезического круга, то существует универсальная оценка его радиуса в зависимости от μ — существует функция $f(\mu)$ такая, что $r \leqslant f(\mu)$ (при этом $f(\mu)$ монотонно стремится к $+\infty$ при $\mu \to +\infty$); в качестве такой функции можно взять функцию $f(\mu) = \pi\sqrt{1+\mu^2}$. Как следствие из указанного вытекает следующее предложение: Если поверхность является полной и всюду регулярной, то либо верхняя грань модуля средней кривизны H равна бесконечности, либо верхняя грань гауссовой кривизны K не меньше нуля.

Э. Г. Позняк

6838. Интегральные соотношения, связанные с бесконечно малыми изгибаниями замкнутых пространственных кривых. Гротемейер (Integralsätze bei infinitesimalen Verbiegungen von geschlossenen Raumkurven. Grotemeyer Karl-Peter), Arch. Math., 1955, 6, № 3, 250—252 (нем.)

Если $\bar{x}(s)$ — радиус-вектор замкнутой кривой L, $k(s)$ и $\varkappa(s)$ — кривизна и кручение L, а $\bar{n}$ и $\bar{b}$ — векторы главной нормали и бинормали, то вариации δk кривизны и $\delta\varkappa$ кручения при бесконечном малом изгибании L удовлетворяют следующим интегральным соотношениям:

$$\oint_L \delta k ds = -\oint_L \varkappa (b\delta\dot{\bar{x}})\, ds,$$

$$\oint_L \delta k \bar{x} ds = -\oint_L \varkappa \{[\delta\dot{\bar{x}}\bar{n}] + \bar{x}(\bar{b}\delta\dot{\bar{x}})\}\, ds.$$

$$\oint_L \delta\varkappa ds = \oint_L k(\bar{b}d\dot{\bar{x}})\, ds.$$

Эти соотношения просто получаются при помощи формул Френе.

Э. Г. Позняк

6839. О двух интегральных инвариантах метрической теории линейчатых поверхностей. Сабан (Su due invarianti integrali della teoria metrica delle superficie rigate. Saban Giacomo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, 18, № 1, 50—54 (итал.)

Пусть R — линейчатая поверхность, C — ее направляющий конус, I — пересечение C и единичной сферы Σ с центром в вершине C. Поверхность R предполагается замкнутой в том смысле, что замкнуты I и линия сжатия L поверхности R. Пусть K — наименьшая сферическая шапочка, содержащая I, и r — радиус края K.

Аналогично определяются J и ρ для линейчатой поверхности, образованной касательными к R, проходящими через ее точку сжатия перпендикулярно к образующим. Для интегральных инвариантов поверхности R, в предположении, что I и J содержатся в полусфере Σ, получены оценки $\oint_L pds \geqslant 2\pi\cos\rho$, $\oint_L |q|\, ds \geqslant 2\pi\cos r$, которые являются наилучшими.

Г. И. Дринфельд

6840. Некоторые доказанные и предполагаемые изопериметрические неравенства. Пойа (More isoperimetric inequalities proved and conjectured. Pólya G.), Comment. math. helv., 1955, 29, № 2, 112—119 (англ.)

Пусть D — односвязная плоская область, A — площадь D, L — длина периметра D, I — полярный момент инерции D относительно центра тяжести D, P — жесткость кручения упругого тела с поперечным сечением D. Автор предполагает, что величина PIA^{-4} для выпуклых областей заключена в пределах $1/45 < PIA^{-4} < 1/27$ и доказывает правую часть этого неравенства. Указывается при этом, что константу $1/27$ нельзя уменьшить. (Для невыпуклых областей величина PIA^{-4} может изменяться от 0 до ∞.) Автор показывает, что изопериметрическое частное L^2A^{-1} обладает следующими двумя свойствами: (I) среди всех областей круг имеет минимум L^2A^{-1}, (II) среди всех n-угольников правильный многоугольник имеет минимум L^2A^{-1}. Очевидно, (II) включает (I). Вопросы единственности минимума не рассматриваются. Свойство (I) остается справедливым для частных L^4I^{-1} и IA^{-2}. Автор предполагает, что справедливость (I) влечет за собой справедливость (II). Автор также предполагает, что для изопериметрических частных IA^{-2} и L^4I^{-1} имеет место свойство (II). Для выпуклых многоугольников показано, что минимум IA^{-2} достигается только для правильных многоугольников.

Э. Г. Позняк

6841. Краевая задача, связанная с изгибанием полусферы III. Ниче (Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. III.

Nitsche Joachim), Arch. Math., 1955, 6, № 2, 145—150 (нем.)

Доказывается, что если периодическая функция $\mu(\varphi)$ удовлетворяет условию Гельдера (причем, константа Гельдера меньше фиксированного достаточно малого числа) и условиям (1) (РЖМат, 1956, 4887), то существует изометричная полусфере трижды непрерывно дифференцируемая поверхность, у которой производная кривизны граничной кривой равна $\mu(\varphi)$. Таким образом, три работы автора (РЖМат, 1954, 4176; 1956, 4887) полностью решают вопрос о необходимых и достаточных условиях, которым должна удовлетворять производная $\mu(\varphi)$ кривизны граничной кривой поверхности, изометричной полусфере радиуса 1. Такими условиями являются условия (1). Э. Г. Позняк

См. также: 6306, 6450, 6461, 6472 К, 6480, 6491 К, 6628, 6629, 6645 К

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

6842. **О погрешности метода Рунге—Кутта при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n.** Гаучи (Über den Fehler des Runge — Kutta—Verfahrens fur die numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Gautschi Walter), Z. angew. Math. und Phys., 1955, 6, № 6, 456—461 (нем.; рез. англ.)

Рассматривается уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ с начальными условиями $y^{(\nu)}(x_0) = y_0^{(\nu)} (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ в предположении, что в области $|x - x_0| \leqslant a$, $|y_\lambda - y_0^{(\lambda-1)}| \leqslant b_\lambda$, где $y_\lambda = y^{(\lambda-1)}$, функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ и ее производные $\partial^l f / \partial x^i \partial y_1^{j_1} \partial y_2^{j_2} \ldots \partial y_n^{j_n}$ однозначны и непрерывны и выполняются следующие неравенства:

$$|y_\lambda| \leqslant N \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

$$|\partial^l f / \partial x^i \partial y_1^{j_1} \partial y_2^{j_2} \ldots dy_n^{j_n}| \leqslant M / N^{j_1 + j_2 + \ldots + i_n - 1}$$
$$(0 < l \leqslant 4).$$

Пользуясь специальной схемой метода Рунге — Кутта (см., например, Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, 1953, гл. 1) и тейлоровским разложением, автор дает оценку погрешности метода в виде формул:

$$|\varepsilon_\nu(h)| \leqslant p(2{,}78p + 3{,}50)(n+1)^3 \times$$
$$\times MN((M^3 - 1)/(M - 1))|h|^{p+3} / (p+3)!$$
$$(p = n - \nu;\ \nu = 0, 1, \ldots, n-2;\ n \geqslant 2);$$
$$|\varepsilon_{n-1}(h)| \leqslant 0{,}453(n+1)^4 MN((M^4 - 1)/(M - 1))|h|^5$$
$$(n \geqslant 1);$$
$$|\varepsilon_\nu(h)| = y_a^{(\nu)}(x_0 + h) - y^{(\nu)}(x_0 + h) \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Как частный случай, автор получает из своих формул оценку для $n = 1$, данную Л. Бибербахом в 1951 г. А. И. Кулешов

6843. **О сходимости приближений по методу Лайтхилла.** Вазов (Onthe convergence of an approximation method of M. J. Lighthill. Wasow Wolfgang), J. Rational Mech. and Analysis, 1955, 4, № 5, 751—767 (англ.)

Теоретическое обоснование специфического применения Лайтхиллом (Lighthill M., Philos. Mag., 1949, 40, 1179—1202) метода малого параметра по отношению к уравнению $(x \quad \alpha u)\, du/dx + q(x)\, u - r(x) = 0$ в предположении, что $q(x)$ и $r(x)$ голоморфны при $|x| \leqslant a$. Лайтхилл ищет решение в виде

$$x = \xi + x_1(\xi)\alpha + x_2(\xi)\alpha^2 + \ldots, \qquad (1)$$
$$u = u_0(\xi) + u_1(\xi)\alpha + u_2(\xi)\alpha^2 + \ldots \qquad (2)$$

так, чтобы оно удовлетворяло начальному условию $u = b$ при $x = 1$. Подставляя в уравнение $(x + \alpha u)u_\xi + (q(x)u - r(x))x'_\xi = 0$ (1) и (2) после разложения $r(x)$ и $q(x)$ в точке ξ по степеням $(x - \xi)$, Лайтхилл получает выражение $L_0(\xi) + L_1(\xi)\alpha + L_2(\xi)\alpha^2 + \ldots$, где $L_0(\xi) = \xi u'_0 + q u_0 - r$, $L_s(\xi) = \xi u'_s + q u_s + (q u_0 - r)x'_s + (u'_0 + q' u_0 - r')x_s - R_s$, $R_s = R_s(\xi, x_j, u_j, x'_j, u'_j)$, $j \leqslant s - 1$.

Автор доказывает законность различного разбиения R_s на $R_s^{(1)}$ и $R_s^{(2)}$, где $R_s^{(1)} + R_s^{(2)} = R_s$, представляя $(q u_0 - r)x'_s + (u'_0 + q' u_0 - r')x_s = R_s^{(1)}$, $\xi u'_s + q u_s = R_s^{(2)}$. Ясно, что необходимо $L_s \equiv 0$. Рассматриваются два случая: 1) $q(0) < 0$; 2) $q(0) > 0$. Например, если $q(0) < 0$ и $r(0) = 0$, то (1) и (2) сходятся при $|\alpha| \leqslant \delta \xi^{-\rho}$, где $\rho = \min(-q(0), 1)$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\delta = \text{const}$. В. В. Леонов

6844. **Применение вариационного метода к расчету рассеяния протонов на протонах в области 0—5 *Мэв*.** Скавлем, Эспе (Application of the variational method to the calculation of proton-proton scattering in the region 0—5 Mev. Skavlem S., Espe I.), Arkiv fys., 1956, **10**, № 1, 89—96 (англ.)

Интегрируется уравнение Шредингера при учете сил взаимодействия Кулона и Юкавы. Из требования асимптотического поведения функции ψ вытекает подстановка для вспомогательной функции y с граничными условиями $y(0) = y(\infty) = 0$. Уравнение для y рассматривается как уравнение вариационной задачи при наличии интегральной связи. Эта вариационная задача решается прямым методом на основании другой работы (Hulthén, Skvalem, Phys. Rev., 1952, 87, 297), и определяются соответствующие параметры, характеризующие рассеивание протонов на протонах при различных предположениях о массах мезонов взаимодействия ($300\, m_e$, $370\, m_e$, $400\, m_e$). Приведены две таблицы результатов расчета для диапазона энергий 0,278—5,098 *Мэв*. И. С. Аржаных

6845. **Метод численного интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка, не содержащих явно первых производных.** Вогеларе (A method for the numerical integration of differential equations of second order without explicit first derivatives. Vogelaere Rene de), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1955, **54**, № 3, 119—125 (англ.)

Для численного интегрирования дифференциального уравнения $y'' = f(x, y)$ с начальными условиями, заданными в точке $x = 0$, рекомендуется вычислительная схема, основанная на приближенных формулах

$$y_{2n+1} = y_{2n} + h y'_{2n} + (h^2/6)(-f_{2n-1} + 4f_{2n}), \qquad (1)$$
$$y_{2n+2} = y_{2n} + 2h y'_{2n} + (h^2/3)(2f_{2n} + 4f_{2n+1}), \qquad (2)$$
$$y'_{2n+2} = y'_{2n} + (h/3)(f_{2n} + 4f_{2n+1} + f_{2n+2}) \qquad (3)$$
$$(y_k = y(kh),\ y'_k = y'(kh),\ f_k = f(kh, y_k)),$$

позволяющих последовательно вычислять y_{2n+1}, y_{2n+2} и y'_{2n+2} по найденным ранее y_{2n-1}, y_{2n}, y'_{2n}. Предлагаются два варианта для начала счета: а) y_1 вычисляется по приближенной формуле $y_1 = y_0 + hy'_0 + (h^2/6)(2f_0 + \tilde{f}_1)$, где $\tilde{f}_1 = f(h, y_0 + hy'_0 + (h^2/2) f_0)$, после чего y_2 и y'_2 вычисляются по формулам (2) и (3); б) по приближенной формуле $y_{-1} = y_0 - hy'_0 + (h^2/2) f_0$ вычисляется y_{-1}, после чего y_1, y_2, и y'_2 вычисляются по формулам (1), (2) и (3). Вычисление y_{2n} и y'_{2n} $(n=1,2,\ldots)$ осуществляется в указанной схеме с погрешностями порядка h^5.

Даны некоторые указания по вопросу программирования рекомендуемой схемы для быстродействующих вычислительных машин. Приведены формулы, позволяющие осуществлять контроль вычислений. Предложенный метод численного интегрирования сопоставляется с другими численными методами, в частности с методом Рунге—Кутта. Метод легко обобщается на системы дифференциальных уравнений второго порядка, не содержащих явно первых производных. Приведен пример численного интегрирования системы двух дифференциальных уравнений второго порядка.

И. М. Рапопорт

6846. Распространение погрешностей усечения при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений методом повторных замыканий. Грей (Propagation of truncation errors in the numerical solution of ordinary differential equations by repeated closures. Grey H. J., Jr), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, **2**, № 1, 5—17 (англ.)

Рассматривается численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, основанное на приближенной фурмуле

$$x_n = \sum_{j=1}^{N} a_j x_{n-j} + h \sum_{j=0}^{M-1} b_j x'_{n-j}$$

$(x_j = x(jh),\ x'_j = x'(jh))$. Применительно к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $x' = Ax$ формула (1) приводит к системе разностных уравнений, общее решение которой выражается линейными комбинациями функций $\exp(j\mu_{rs}h)$, где $\mu_{rs}h = -\ln p_{rs}$, p_{rs} — решения алгебраического уравнения

$$1 - \sum_{j=1}^{N} a_j p^j = \lambda_r h \sum_{j=0}^{M-1} \quad (2)$$

λ_r — собственные числа матрицы A (предполагается, что матрица A не имеет кратных собственных чисел). Рассматривается вопрос об отыскании тех значений коэффициентов $a_1, \ldots, a_N$, $b_0, \ldots, b_{M-1}$, при которых для одного из корней p_{rs} уравнения (2) величина $\mu_{rs} = -(1/h)\ln p_{rs}$ будет отличаться от λ_r на величину наибольшего возможного порядка малости относительно h. Приведена таблица коэффициентов a_j, b_j. Указано, что некоторые из построенных таким путем приближенных формул (1) могут приводить к неустойчивости счета. Приведен пример системы $x' = y$, $y' = -2y - 2x$ (в этом случае $\lambda_r = -1 \pm i$). При $N=2$, $M=3$, $h=0{,}1$ решения уравнения (2) дают для μ_{rs} две пары значений $-0{,}999998 \pm 0{,}999998i$ и $0{,}333826 \pm (10\pi - 0{,}332838)\,i$.

И. М. Рапопорт

6847. Об одном методе двухсторонних приближений к решению дифференциального уравнения. Азбелев Н. В., Тр. Ижевского механ. ин-та, 1955, № 1, 79—84

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} = f[y], \quad (1)$$

где $f[y] = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ предполагается непрерывной в области $x_0 \leqslant x \leqslant X$, $a_k \leqslant y^{(k)} \leqslant b_k$ и удовлетворяющей условию $f[y_1] - f[y_2] < \sum_{k=0}^{n-1} (y_1^{(k)} - y_2^{(k)})\, p_k(x)$ для любых систем значений $y_1^{(k)}$ и $y_2^{(k)}$ при условиях $x_0 < x < X$, $a_k < y_1^{(k)} < y_2^{(k)} < b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Предполагая дополнительно, что уравнение (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \quad (2)$$

и непрерывные функции $p_k(x)$ таковы, что производные $\xi^{(k)}(x)$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ решения уравнения $\xi^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \xi^{(k)} p_k(x)$ при условиях $\xi(x_0) > 0$, $\xi^{(k)}(x_0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ положительны в промежутке (x_0, X), автор дает метод построения верхних и нижних приближений для решения уравнения (1) при условиях (2). Построение проводится с помощью уравнения (3). Работа заключается формулировкой следующей теоремы о неравенствах: Пусть z — верхняя функция сравнения (т. е. $z^{(n)} - f[z] \geqslant 0$, $z^{(k)}(x_0) - y_0^{(k)} = \alpha_k \geqslant 0$, $a_k < z^{(k)} < b_k$) и ξ_z — решение уравнения

$$\xi^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)\, \xi^{(k)} + \varphi \quad (3)$$

$(\varphi \geqslant z^{(n)} - f[z],\ \xi^{(k)}(x_0) \geqslant \alpha_k,\ k = 0, 1, \ldots, n-1)$,

а ξ_u — решение этого же уравнения, но при $\varphi \leqslant u^{(n)} - f[u]$, где $u = z - \xi_z$. Для выполнения неравенств

$$z^{(m)} > y^{(m)} > u^{(m)} \quad (m \leqslant n-1)$$

в промежутке (x_0, X) достаточно, чтобы в этом промежутке имело место неравенство $\xi_z^{(m)} + \xi_u^m \geqslant 0$.

Б. Н. Бабкин

6848. Применение метода Чаплыгина к уравнению $F(x, y, z, p, q) = 0$. Кухта Г. П., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1955, **17**, 53—60

Доказывается теорема о дифференциальном неравенстве для уравнения $F(x, y, z, p, q) = 0$ с начальным условием, и дается алгоритм построения верхних функций, если известна одна из них. Предполагается, что задача Коши однозначно разрешима и в некоторой области D выполнены условия: 1) $\partial F / \partial q > 0$, 2) квадратичная форма $F''_p \xi^2 + 2F''_{pq} \xi\eta + F''_{q^2}\eta^2$ положительно определенная. В формулировке теоремы о дифференциальном неравенстве есть неточность в определении области выполнения условий 1) и 2). Б. Н. Бабкин

6849. Некоторые замечания к вопросу о численном интегрировании дифференциальных уравнений методом конечных разностей. Бахвалов Н. С., Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 6, 805—808

Рассматривается вопрос об устойчивости экстраполяционных конечно-разностных схем для интегрирования уравнения $y' = f(x, y)$ при начальном условии $y(x_0) = y_0$. Доказывается теорема о том, что решение разностного уравнения

$$\bar{y}_{m+1} = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} \bar{y}_{m-\lambda} + h \sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda} f(x_{m-\lambda}, \bar{y}_{m-\lambda}) + \beta_{m+1}$$

(β_{m+1} — ошибка округления) является неустойчивым относительно ошибок округления, если $k \leqslant 10$

и соотношение $P(x_{m+1}) = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} P(x_{m-\lambda}) + h \sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda} P'(x_{m-\lambda})$ выполняется для всех многочленов степени $k+2$.

Уточняется оценка величины погрешности численного интегрирования, данная в работе М. Р. Шура-Бура (Прикл. матем. и механика, 1952, 16, № 5, 575) для случая, когда все $u_{-\lambda} + hv_{-\lambda} f_y(x, y) \geqslant 0$ в некоторой окрестности решения. Л. М. Голубева

6850. О численном интегрировании уравнений в комплексной области. Бочек Л. В. Вычисл. матем. и вычисл. техника, сб. 2, 1955, 94—96

Рассматривается численное интегрирование методом Адамса дифференциального уравнения $dw/dz = f(w, z)$ с комплексным независимым переменным z. Для установления приближенных зависимостей между значением функции $w(z)$ в точке z_{k+1} и значениями этой функции в точках $z_1, \ldots, z_k$ применяется приближенная формула

$$w(z_{k+1}) \approx \sum_{r=1}^{k} p_r \left[w(z_r) + \int_{z_r}^{z_{k+1}} P_{k-1}(z)\, dz \right],$$

$$\sum_{r=1}^{k} p_r = 1.$$

где $P_{k-1}(z)$ — полином степени $k-1$, принимающий в точках $z_1, \ldots, z_k$ значения $P_{k-1}(z_s) = f_s$, $s = 1, 2, \ldots, k$ ($f_s = f(w(z_s), z_s)$). Приведен ряд подобного рода приближенных формул, соответствующих различному взаимному расположению точек $z_1, \ldots, z_{k+1}$ и различным значениям коэффициентов $p_1, \ldots, p_k$, с указанием оценок для остаточных членов этих формул.

И. М. Рапопорт

6851. Уравнения и сходимость дифференциально-разностного метода (метода прямых). Лебедев В. И., Вестн. Моск. ун-та, 1955, № 10, 47—57

В конечной по оси y гладкой плоской области, пересекаемой прямыми $y = \text{const}$ не более чем в двух точках, рассматривается уравнение

$$L_1(u) + L_2\left(\sum_{j=1}^{p} b_j(y)\, \partial^j u / \partial y_j\right) = f(x, y) \quad (p > 1) \quad (1)$$

при каких-либо граничных условиях. Здесь $L_i = \sum_{k=0}^{m_i} a_{ik}(x)\, \partial^k / \partial x^k$ $(i = 1, 2)$. Приводится способ составления и решения системы уравнений метода прямых (ср., например, Михлин С. Г., Прямые методы в математической физике, 1950, Гостехиздат, гл. 7) для уравнения (1). В связи с этим подчеркивается аналогия метода прямых и метода Фурье. Утверждается, что в известном смысле сходимость метода прямых следует из сходимости метода сеток. Приведен пример, когда метод сеток расходится, а метод прямых дает точное решение. Специально рассматривается сходимость метода прямых для уравнений $u_{xx} + u_{yy} = f$, $u_t - u_{xx} = f$, $u_{tt} - u_{xx} = f$ при простейших однородных граничных и начальных условиях. Доказательства конспективны.

М. Ш. Бирман

6852. О применении метода Б. Г. Галеркина к линейным задачам динамики систем с распределенными параметрами. Гуревич С. Г., Инженерный сб., 1955, 22, 48—52

Используя преобразование Лапласа, решение уравнения

$$a_1(x)\, \partial u/\partial t + a_2(x)\, \partial^2 u/\partial t^2 + L(u) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\, \psi_j(t),$$

$$L(u) = \sum_{j=1}^{h} b_j(x)\, \partial^j u / \partial x^j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{h-1} (\alpha_{jk} \partial^j u(0)/\partial x^j + \beta_{jk} \partial^j u(l)/\partial x^j) = \gamma_k \quad (k = 1, 2, \ldots, h),$$

$$u(x, 0) = \omega_1(x),\ \partial u(x, 0)/\partial t = \omega_2(x)$$

автор сводит к решению уравнения для изображающей функции

$$a_1(x)\, pU(x, p) + a_2(x)\, p^2 U(x, p) + L[U(x, p)] = \sum_{j=1}^{m} f_j(x)\, \Psi_j(p),$$

для приближенного решения которого применяется метод Галеркина. Приводится числовой пример.

В. П. Ильин

6853. Об одном приближенном способе решения одномерной задачи Стефана. Гаджиева М. Г., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1955, № 4, 3—5 (рез. азерб.)

6854. О численном решении уравнения в частных производных $\Delta X = Y$ методом конечных разностей. Нисимура (On a numerical solution of partial differential equation, $\Delta X = Y$, by means of finite difference method. Nishimura Tōru), Mem. Fac. Engng Nagoya Univ., 1954, 6, № 2, 196—199 (англ.).

Предлагается уточнение метода квадратных сеток, состоящее в том, что значения X в узлах, лежащих в непосредственном соседстве с границей, связываются со значениями в точках пересечения границы линиями сетки посредством полиномиальной (4-й степени) интерполяционной формулы. Оценки отсутствуют.

Н. А. Ростовцев

6855. Один статистический способ для решения уравнения Лапласа с помощью электронной счетной машины. Хармут (Ein statistisches Verfahren zur Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung durch elektronische Rechenmaschinen. Harmuth Hennig), Acta phys. austriaca, 1954, 9, № 1, 27—32 (нем.)

Предлагается способ, подобный методу Монте-Карло, но, по мнению автора, более эффективный, основанный на принципе использования известной «доски Гальтона», употребляемой в механических моделях, заменен здесь электронной аналогией.

Уравнение Лапласа $\Delta U = 0$ рассматривается как частный случай уравнения $\Delta U = a\partial U/\partial t$ (для $\partial U/\partial t = 0$), производные в котором заменяются через конечные разности. Обозначая $U_1 = U + 2\Delta U$, $U_2 = U + \Delta U$, $U_3 = U$, получим

$$U_1 - 2U_2 + U_3 = \alpha \Delta U_t, \quad (1)$$

где $\alpha = a(\Delta x)^2/\Delta t$.

С другой стороны, рассматривая «доску Гальтона», можно получить соотношение (Gilbert W. King, Proceedings IBM, Computation Seminar, Dez. 49) $B' = q^2 A + 2pqB + p^2 C$, где p/q — отношение, в котором разделяются между собой соседние стержни шариками ($p + q = 1$). Составим разность $B' - B = q^2 A - 2(1/2 - pq)B + p^2 C = (A - 2B + C)/4$; для $p = q = 1/2$ она перейдет в (1), если положить $B' - B = \Delta U_t$, $A = U_1$, $B = U_2$, $C = U_3$ и $\alpha = a(\Delta x)^2/\Delta t = 4$. Уравнение Лапласа получится, когда $B' = B$. Приводится пример, затем применение метода к уравнению Пуассона и, наконец, случай пространственной задачи.

Я. И. Алихашкин

6856. Дискретная задача Неймана. Иноуэ (Discrete Neumann problem. Inoue Masao), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1954, A5, № 2, 101—109 (англ.)

Рассматривается задача Нёймана на сетке L плоскости x, y, точки которой имеют координаты (mh, nh). Множество внутренних точек L обозначено через I, множество граничных — через Г. Доказывается существование и единственность (с точностью до постоянной) решения $u(P)$ задачи. Функция $u(P)$ определена в узлах сетки и удовлетворяет условиям: $Du(P) = 0$, $\partial u(\widehat{PP}_i) = f(\widehat{PP}_i)$, где D — разностный аналог оператора Лапласа, $\partial u(\widehat{PP}_i) = [u(\widehat{PP}_i) - u(P_i)]/h$; $u(\widehat{PP}_i)$ — значение функции в точке $P \in \Gamma$, соседней с точкой P_i (функция $u(P)$ может быть многозначна на Г). Причем $f(\widehat{PP}_i)$ удовлетворяет условию $\sum_{P\in\Gamma} \sum_{i=1}^{s(p)} f(\widehat{PP}_i) = 0$, где $s(P)$ — число точек P_i, соседних с точкой P. Теорема доказывается с помощью принципа Дирихле. Дается определение дискретной функции Нёймана $N(P, Q)$, где $P \in L$, $Q \in I$:

$$D_p N(P, Q) = 0 \text{ для } P \neq Q,\ P \in I, \quad (1)$$

$$D_p N(P, Q) = -M/h \text{ для } P = Q, \quad (2)$$

$$\partial N(\widehat{PP}_i, Q) = -1 \text{ для } P \in \Gamma, \quad (3)$$

$$\sum_{P\in\Gamma} \sum_{i=1}^{s(p)} N(\widehat{PP}_i, Q) = 0, \quad (4)$$

где $M = \Sigma_{P\in\Gamma} s(P)$. Для решения $u(Q)$ задачи выводится формула

$$u(Q) = \frac{1}{M} \sum_{P\in\Gamma} \sum_{i=1}^{s(p)} N(\widehat{PP}_i,\ Q) f(\widehat{PP}_i). \quad (5)$$

Указывается, что эта формула дает возможность легко найти численные значения $u(Q)$, если известна $N(\widehat{PP}_i, Q)$. Приводится таблица значений $N(\widehat{PP}_i, Q)$ для квадратной сетки при $h = 1$ с 25 внутренними точками. При нахождении $N(P, Q)$ для таблицы условие (4) заменяется условием $\min N(P, Q) = 0$. Условие (4) использовано автором при выводе формулы (5). Однако (5) можно доказать и для $N(P, Q)$, удовлетворяющей только условиям (1), (2), (3). А. И. Кулешов

6857. Оценка ошибки при приближенном решении интегральных уравнений. Пták (Odhad chyby při přibližném řešení integrálních rovnic. Pták Vlastimil), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 4, 427—447 (чеш.; рез. русс., англ.)

Настоящая работа опирается на работу Л. В. Канторовича (Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 6, 89—185). Она ставит себе целью разработать с использованием методов функционального анализа общую схему, которую можно применить к оценке ошибки различных приближенных методов решения интегральных уравнений. Сущность метода заключается в том, что наряду с пространством Банаха X, в котором нужно решить уравнение $Ax = y$, рассматривается подпространство $\tilde{X} \subset X$, в котором решается приближенное уравнение $PAx = Py$, где P — проекция X на $\tilde{X}$. Затем производится оценка разности между точным решением x и приближенным решением $\tilde{x}$. Резюме автора

6858. Поле температур в электрических катушках. Численный расчет. Шнейдер (Temperature fields in electrical coils: numerical solutions. Schneider P. J.), Commun. and Electronics, 1954, № 10, 768—771 (англ.)

Применяется релаксационный метод Эммонса и Саусвелла (Emmons H. W., Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1943, **65**, 607—615) при расчете установившегося поля температур в электрических катушках. Из катушки вырезается объем, ограниченный двумя параллельными, достаточно близкими поперечными сечениями, который подразделяется плоскостями, перпендикулярными к плоскости поперечного сечения, на n объемов, в каждом из которых коэффициент теплопроводности k постоянен. В каждом из этих объемов выделим точку и соединим эти точки фиктивными теплопроводными стержнями. Обозначим установившуюся температуру в i-м объеме через t_i, а $(a/L)_{ij}$ — отношение площади, перпендикулярной к стержню, соединяющему точки i и j, и ограниченной объемами i и j, к длине стержня (i, j); v_i — i-й объем. Тогда величины t_j определяются следующей системой уравнений: $Q_i v_i/k_i + \Sigma_j (a/L)_{ij}(t_i - t_j) = 0$, $i = 1, 2, \ldots n$, где j — соответствует объемам, соседним с i-м объемом. Если температура на границе контура катушки неизвестна и i — точка на границе, то согласно закону Ньютона, $Q_i v_i + \Sigma_j (h_s A)_i (t_i - t_j) = 0$, где A — площадь на границе контура, отнесенная к данной точке i. Полученное решение дает хорошее совпадение с экспериментальными данными и точным аналитическим решением. Я. М. Каждан

6859. Численный расчет поля температур в электрических катушках. Шнейдер (Numerical solutions for temperature fields in electric coils. Schneider P. J.), Electr. Engng, 1953, **72**, № 12, 1052 (англ.)

Дается краткое содержание работы автора (см. реф. 6858).

6860. Вычисление тока в катушке с насыщенным сердечником. II. Обобщение метода для получения приближенного решения дифференциального уравнения порядка n и оценки погрешности. Гомес Гарсия (El problema del calculo de la corriente en bobinas de nucleo saturable. II. Generalización del método seguido para obtener una solución aproximada de una ecuación diferencial de orden n y una cota del error. Gómez García J. A.), An. Real. soc. española fís. y quím., 1953, **A 49**, № 7/8, 211—216 (исп.; рез. англ.)

Обобщение рассмотренного автором ранее приближенного метода интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (РЖМат, 1956, 3324) на случай уравнения порядка n. Н. А. Бразма

6861. Метод вычисления собственных значений и собственных векторов, предложенный на основе классических результатов теории симметричных матриц. Гивенс (A method of computing eigenvalues and eigenvectors suggested by classical results on symmetric matrices. Givens W.), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. ser., 1953, № 29, 117—122 (англ.)

Кратко описывается процесс приведения произвольной симметричной матрицы A к симметричной трехдиагональной форме $S = (s_{ij})$, где $s_{ij} = \alpha_i (j = i)$, $\beta_i (j = i + 1)$, $0 (j \geqslant i + 2)$, при помощи выполнения вполне определенной последовательности ортогональных преобразований ($(n-1)(n-2)/2$ вращений), изменяющих на каждом шагу только два столбца и две строки матрицы. Общее число необходимых умножений порядка $4n^3/3$. Собственные значения определяются при помощи построения характеристического полинома $f_n(\lambda)$ матрицы S (являющегося также характеристическим полиномом матрицы A) по рекуррентным трехчленным соотношениям $f_i(\lambda) = (\lambda - \alpha_i) f_{i-1}(\lambda) - \beta_{i-1}^2 f_{i-2}(\lambda)$, где $f_{-1} = 0$, $f_1 = 1$, $i = 1, \ldots, n$, аналогично тому как это делается в методе минимальных итераций (Lanczos C., J. Res. Nat. Bur. Standards, 1950, **45**, 255—282).

Собственные векторы матрицы S строятся также по рекуррентным соотношениям.

Собственные векторы матрицы A находятся по формуле $y = Tx$, где $Sx = \lambda x$ и T — результирующая матрица преобразования ($S = T'AT$). В. Н. Фаддеева

6862. **Определение собственных чисел и собственных векторов матрицы с помощью алгоритма деления и вычитания. Рутисхаузер** (Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix mit Hilfe des Quotienten-Differenzen-Algorithmus. Rutishauser Heinz. Z. angew. Math. und Phys., 1955, **6**, № 5, 387—401 (нем.; рез. англ.)

В предыдущей работе (РЖМат, 1955, 5316) автор описал «алгоритм деления и вычитания» и дал некоторые его применения. в частности для определения собственных чисел λ_σ матрицы A. Здесь с помощью этого алгоритма строится итерационный метод, позволяющий получить сразу все собственные векторы r_σ (и собственные числа λ_σ) матрицы A. Исходными являются n векторов $x_\sigma^{(0)}$ и величины $\alpha_\sigma^{(0)}$, $\beta_\sigma^{(0)}$, получаемые процессом биортогонализации Ланцоша из пары произвольных векторов $x_1^{(0)}$, y_1. Рекуррентные формулы следующие:

$$q_\sigma^{(2\mu)} = \alpha_\sigma^{(2\mu)} - e_{\sigma-1}^{(2\mu)}; \quad e_\sigma^{(2\mu)} = \beta_\sigma^{(2\mu)} / q_\sigma^{(2\mu)};$$

$$q_\sigma^{(2\mu+1)} = q_\sigma^{(2\mu)} + e_\sigma^{(2\mu)} - e_{\sigma-1}^{(2\mu+1)};$$

$$e_\sigma^{(2\mu+1)} = e_\sigma^{(2\mu)} q_{\sigma-1}^{(2\mu)} / q_\sigma^{(2\mu+1)};$$

$$\alpha_\sigma^{(2\mu+2)} = q_\sigma^{(2\mu+1)} + e_\sigma^{(2\mu+1)}; \quad \beta_\sigma^{(2\mu+2)} = q_{\sigma+1}^{(2\mu+1)} e_\sigma$$

$$x_\sigma^{(2\mu+2)} = x_{\sigma+1}^{(2\mu)} + q_\sigma^{(2\mu)} x_\sigma^{(2\mu)} - e_{\sigma-1}^{(2\mu-1)} x_{\sigma-1}^{(2\mu+2)}.$$

Если среди собственных значений λ_σ нет равных по модулю, то при $\mu \to \infty$ векторы $x_\sigma^{(2\mu)}$ стремятся к собственным векторам r_σ матрицы A, а $\alpha_\sigma^{(2\mu)}$ — к λ_σ. В случае комплексных собственных значений λ_m и $\lambda_{m-1} = \overline{\lambda_m}$, отличных по модулю от остальных λ_σ, плоскость, натянутая на $x_m^{(2\mu)}$ и $x_{m+1}^{(2\mu)}$, сходится к плоскости, натянутой на r_m и r_{m+1}. Соотношение $Ax_\sigma^{(2\mu)} = x_{\sigma+1}^{(2\mu)} + e_\sigma^{(2\mu)} x_\sigma^{(2\mu)} + q_{\sigma-1}^{(2\mu)} x_{\sigma-1}^{(2\mu)}$ позволяет в процессе вычислений следить за ростом погрешностей.

Указывается метод ускорения сходимости, сводящийся к тому, что вместо A рассматривается матрица $A - \lambda E$, где λ — приближенное значение для минимального собственного числа матрицы A. Изложенный метод применяется также для вычисления собственных значений и векторов бесконечных симметрических матриц. Л. В. Курочкина

6863. **Определение собственных значений и собственных векторов матриц. Хестенес** (Determination of eigenvalues and eigenvectors of matrices. Hestenes Magnus R.), Nat. Bur. Standards, Appl. Math. ser., 1953, № 29, 89—94 (англ.)

Краткое описание методов определения собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы, которые, по мнению автора, после экспериментов, проведенных (с 1948 по 1951 г.) в Институте численного анализа при Национальном бюро стандартов, могут успешно применяться на практике. Это степенной метод, градиентный метод (в трех модификациях — с постоянным множителем, наискорейшего спуска, неполного спуска) (Канторович Л. В., Докл. АН СССР, 1947, **56**; Hestenes M. R., Karush W., J. Res. Nat. Bur. Standards, 1951, **47**, 45), k-шаговое обобщение (Karush W., Pacif. J. Math., 1951, **1**, 233—248), метод минимальных итераций (Lanczos C., J. Res. Nat. Bur. Standards, 1950, **45**, 225), метод блоков для матриц высокого порядка. В заключение кратко описано применение градиентного метода для решения обобщенной проблемы $Ax = \lambda Bx$, где A и B — произвольные матрицы. В. Н. Фаддеева

6864. **О границах собственных значений. Васидзу** (On the bounds of eigenvalues. Washizu K.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, **8**, № 3, 311—325 (англ.)

Рассматривается вопрос о собственных значениях задачи $Au = \lambda u$, где A — вещественная симметрическая матрица, λ_1 — ее наименьшее, а λ_n — наибольшие собственные значения. Принципом Релея автор называет соотношение $\lambda_1 \leqslant (w, Aw)/(w, w) \leqslant \lambda_n$ для произвольного вектора w. Аналогичное утверждение приводится и для задачи $Vu = \lambda Tu$, где матрицы V, T вещественны и симметричны и T положительно определена. Отсюда выводится теорема Уэйси, доказанная ранее в работе Саусвелла (РЖМат, 1954, 3381). Далее кратко излагается геометрическая интерпретация некоторых теорем о границах собственных значений. Во второй части работы применением принципа Релея к матрице $f(A)$, где $f(\lambda)$ — дробнорациональная функция, а матрица A вещественна и симметрична, получается теорема: Пусть $\lambda_{RM} = (w, f(A)w)/(w, w)$ и пусть для простоты равенство $f(\lambda) = \lambda_{RM}$ имеет место лишь в двух точках $\lambda = a$ и $\lambda = b$. Тогда по крайней мере одно собственное значение матрицы A лежит внутри отрезка $[a, b]$ и одно — вне его. Рассматривая частные виды функции $f(\lambda)$, автор получает некоторые теоремы о границах собственных значений и рассматривает их геометрический смысл. Как частный случай получаются два неравенства из указанной выше работы Саусвелла.

Н. И. Польский

6865. **Замечание об уточнении приближенных собственных значений и собственных векторов симметрической матрицы. Гуд и** (Note on the improvement of approximate latent roots and modal columns of a summetrical matrix. Goodey W. J.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, **8**, № 4, 452—453 (англ.)

Ранее Яном (Jahn H. A., Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1948, **1**, № 2, 131—144) было предложено два метода уточнения уже найденных каким-нибудь способом приближенных собственных векторов и значений симметрической матрицы. В реферируемой заметке дается более компактное изложение этих методов. При отыскании собственных значений предполагается, что все они различны и среди них нет достаточно близких.

Н. И. Польский

6866. **N-шаговые итеративные процессы. Крейг** (The N-step iteration procedures. Craig Edward J.), J. Math. and Phys., 1955, **34**, № 1, 64—73 (англ.)

Решение системы N линейных уравнений $Ax = b$ может быть получено в виде $x = x_0 = \sum_{i=0}^{N-1} m_i p_i$, где x_0 — произвольный вектор, p_i — линейно независимые векторы. Коэффициенты m_i определяются особенно просто, если векторы p_i B-ортогональны (т. е. если $(Bp_j, p_i) = 0$, $j \neq i$), где B — некоторая симметричная или эрмитова матрица, вообще говоря, положительно определенная. Векторы p_i могут быть получены процессом B-ортогонализации любой системы линейно независимых векторов. Выбор этой системы и метрики определяют тот или другой метод. Например, для симметричной матрицы A, применяя A-метрику, Фокс (Fox L., Huskey H. D., Wilkinson J. H., Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1948, **1**, 149) берет систему единичных векторов, Ланцош (Lanczos C., J. Res. Nat. Bur. Standards, 1950, **45**, 255—282) — систему линейно независимых итераций

$x, Ax, \ldots, A^{N-1}x$, Штифель (Stiefel E., Z. angew. Math. und Phys., 1952, **3**, 1—33) — систему $b, Ab \ldots, A^{N-1}b$ (метод сопряженных градиентов). Автор предлагает несколько видоизмененный процесс, проводя ортогонализацию в метрике AA', и отмечает, что при проведении описанных методов на быстродействующих машинах хорошие результаты получаются при условии, что число цифр, удерживаемых в вычислениях, превосходит число цифр в квадратном корне из отношения наибольшего собственного значения матрицы $A'A$ к наименьшему. В. Н. Фаддеева

6867. **Практические методы осуществления матричных вычислений. Куффиньяль** (Methodes pratiques de realisation des calculs matriciels. Couffignal Louis), Rend. mat. e applic., 1954, **14**, № 1—2, 85—97 (франц.)

Рассматриваются погрешности в решении системы линейных алгебраических уравнений. Различаются погрешности вычислительные и физические (в более распространенной терминологии, наследственные — результат неточности задания коэффициентов и правых частей). Выводятся приближенные формулы для тех и других. В случае наличия физических погрешностей автор считает недопустимым пользование методами, сводящимися к последовательному уменьшению невязок (следовательно, и машинами непрерывного действия). Он предлагает применять метод исключения, который позволяет в процессе счета обнаружить линейные зависимости (точные или приближенные) между строками матрицы коэффициентов. М. К. Гавурин

6868. **Ошибки в матричных вычислениях. Дуайр** (Errors of matrix computations. Dwyer Paul S.), Nat. Bur. Standards, Appl. Math. Ser., 1953, № 29, 49—58 (англ.)

Автор высказывает мысль, что в приближенных вычислениях должны фигурировать не только приближенные численные значения величин, но и должны указываться границы возможного изменения этих величин за счет неточного задания исходных данных и ошибок округления. Эти границы для максимального или вероятного изменения величин должны получаться в процессе вычисления как неотъемлемая часть этого вычисления. Выводится формула

$$\varepsilon(x) = \{I - A^{-1}\varepsilon(A) + [A^{-1}\varepsilon(A)]^2 - [A^{-1}\varepsilon(A)]^3 + \ldots\} \times \\ \times A^{-1}[\varepsilon(f) - \varepsilon(A)x],$$

выражающая границы погрешности решения линейного уравнения $Ax = f$ через погрешности матрицы A и правой части. Автор высказывает мнение о предпочтительности использования прямых методов перед итерационными. Указывается, что при $\varepsilon(f)$, находящихся в определенных границах, $\varepsilon(x)$ не будет велико даже для плохо обусловленных матриц. Обсуждаются границы ошибок в зависимости от значений неизвестных. Указывается ошибка в определении обратной матрицы; в первом приближении она равна $\varepsilon(A^{-1}) = -A^{-1}\varepsilon(A)A^{-1}$. Библ. 30 назв. Ю. А. Шрейдер

6869. **О численном решении нормальных систем линейных уравнений. Джери** (Sulla soluzione di un sistema normale di un numero notevole di equazioni lineari. Geri Gero), Boll. geod. e. sci. affini, 1955, **14**, № 1, 27—31 (итал.; рез. франц., англ.)

Метод нахождения обратной матрицы, основанный на ее разбиении на клетки. Ю. А. Шрейдер

6870. **Методы обращения матриц. Гринспан** (Methods of matrix inversion. Greenspan Donald), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 5, 303—318 (англ.)

Кратко описываются (по существу на примерах) хорошо известные методы для обращения матриц: метод исключения в форме Жордана, вычисление при помощи союзной матрицы, вычисление посредством деления на клетки, методы, основанные на использовании соотношения Кели — Гамильтона. Работа не содержит новых результатов. В. Н. Фаддеева

6871. **Вычисление коэффициентов влияния для составных сеточных областей при помощи матричных преобразований. Литвинов** (Обчислення коефіцієнтів впливу для складених сіткових областей за допсмогою матричних перетворень. Літвінов М. В.), Доповіді АН УРСР, 1955, № 3, 222—226 (укр.; рез. русс.)

Указывается метод преобразования известных чисел влияния в числа влияния для более крупных областей. Этот метод применим также и к произвольным системам линейных уравнений. Если $a = |a_{ij}|$ и $A = |A_{ij}|$ — матрицы одного и того же порядка k, причем для матрицы a известна обратная $b = a^{-1}$, то для нахождения $B = A^{-1}$ используется следующее тождество: $B = b[E + (E - Ab)/(Ab)^{-1}]$. Если A и a имеют различные элементы только в r столбцах, то основные вычисления проводятся над матрицами порядка r. В работе приводится числовой пример.

Л. М. Голубева

6872. **Детальный пример объединения «кусочных» решений. Крон** (Detailed example of interconnecting piece-wise solutions. Kron Gabriel), J. Franklin Inst., 1955, **259**, № 4, 307—333 (англ.)

Детальное изложение процедуры обращения матрицы 63-го порядка специального типа методом секций, разработанным автором (РЖМат, 1955, 1483, 4018, 5344). В статье точно формулируются условия применимости метода секций. В частности, одним из таких условий является требование отдельного заземления каждой секции соответствующей электрической модели. Приводится подробно разобранный числовой пример.

А. П. Ершов

6873. **Несколько замечаний, касающихся решения системы нормальных уравнений. Банахевич** (Some points relative to the solving of a system of normal equations. Banachiewicz Tadeusz), Acta astron. (Warszawa), 1954, **A5**, Oct., 136-138 (англ.)

См. РЖАстр, 1955, 2572.

6874. **Замечания о способе наименьших квадратов. Кинг** (Some remarks upon the method of least squares. King W. F.), Canad. Surveyor, 1954, **12**, № 5, 331—335 (англ.)

См. РЖАстр, 1955, 3550.

6875. **Новая теория интерполяции для функции n переменных. Ло Хэ** (一個多元函數的內插公式. 羅河), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, **4**, № 2, 125—142 (кит.; рез. англ.)

Описывается построение новой функции $\sum_{i=1}^{r} H_n(t, u, v, \ldots, z)_i$ n переменных $t, u, v, \ldots, z$, тождественно равной заданной функции $f(t, u, v, \ldots, z)$, если $n - 1$ из переменных принимает те значения, которые были использованы при построении этой (интерполяционной) функции. Из резюме автора

6876. **Интерполяция многократных интегралов. Лауффер** (Interpolation mehrfacher Integrale. Lauffer R.), Arch. Math., 1955, **6**, № 2, 159—164 (нем.)

Для интерполяции интеграла $\int_{S^{(n)}} f(x_j) \prod_{i=1}^{n} dx_i$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), где симплекс $S^{(n)}$ ($0 \leqslant x_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 1$) — область аффинного пространства R_n, автор применяет сетку точек $(g_1/m, g_2/m, \ldots, g_n/m)$; $g_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (m — натуральное число, выбираемое произвольно в зависимости от желаемой степени точности). Отмечая, что 1) в замкнутой области $S^{(n)}$ лежит

C^n_{m+n} точек этой сетки (совокупность которых обозначена через $S^{(n)}_m$); 2) алгебраическая целая функция $g(x_j)$ не выше m-й степени обладает не больше чем C^n_{m+n} коэффициентами; 3) из точек множества $S^{(n)}_m$ не более чем $m+1$ лежат на одной прямой, — автор заключает, что упомянутые коэффициенты являются линейными однородными функциями C^n_{m+n} значений функции в точках множества $S^{(n)}_m$, так что $\int_{S^{(n)}} g(x_j) \prod_{i=1}^n dx_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$, также является линейной однородной функцией C^n_{m+n} значений. Отсюда автор получает интерполяционную формулу $\int_{S^{(n)}} g(x_j) \prod_{i=1}^n dx_i = [(n+m)!]^{-1} \sum C_{g_{n-l}, \ldots, g_n} \times \times \sum z_{g_{n-l}, \ldots, g_n}$, где $\sum z_{g_{n-l}, \ldots, g_n}$ есть сумма всех значений функций $f(x_j) = g(x_j)$ в точках множества $S^{(n)}_m$, чьи однородные координаты являются перестановками $(x_0 = 0, \quad x_1 = 0, \ldots, \quad x_{n-l-1} = 0, \quad g_{n-l} \leqslant g_{n-l+1} \leqslant \ldots \leqslant g_n)$. Для определения коэффициентов $C_{g_{n-l}, \ldots, g_n}$ автор фиксирует число m (например, $m = 5$) и вычисляет вышеупомянутую сумму при достаточно простой функции $g(x_j)$ (именно, $g(x_j) = \prod_{i=1}^n x_i^{k_i}$). Хр. Караниколов

6877. Формулы кубатуры, в которых область интегрирования — любой треугольник. Ионеску (Formule de cubatură în care domeniul de integrare este un triunghi oarecare. Ionescu D. V.), Bull. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1953, **5**, № 3, 423—430 (рум.; рез. франц., русс.)

Выводятся формулы кубатуры типа

$$\iint_T \varphi(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^n P_i [\varphi(L_i) + \varphi(M_i) + \varphi(N_i)], \qquad (1)$$

точные для полиномов $\varphi(x, y)$ степени n от переменных x и y, где T — любой треугольник, а L_i, M_i, N_i — неподвижные узлы, центры тяжести масс $(L_i, 1, 1)$, $(1, L_i, 1)$, $(1, 1, L_i)$, помещенных в вершинах треугольника ABC $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Доказывается, что формулы типа (1) возможны, если $n > 5$, вообще возможны, если $(\alpha_1 - \alpha_2) \ldots (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \neq 0$, когда $n \leqslant 5$, и, наверное, возможны, если одно из чисел α_i равно 1.

Из резюме автора

6878. Основа интерполяционных формул. Исикава (補間公式の基礎. 石川榮助), 科學 (Кагаку), 1955, **25**, № 5, 259 (япон.)

Объединение и классификация интерполяционных формул для функций одного переменного. Лим Рюн-чинь

6879. О некотором обобщении гауссовой формулы численного интегрирования. Поцович (Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss. Popoviciu Tiberiu), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR, Fil. Iaşi, 1955, Ser. 1, **6**, № 1—2, 29—57 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматриваются формулы приближенного вычисления значений линейного функционала $A[f]$, определенного на некотором векторном множестве непрерывных функций, через линейную комбинацию значений $f(x)$ и ее производных до порядка $r_i - 1$, в заданных точках x_i, являющиеся обобщением квадратурных формул для интеграла

$$A[f] \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r_i - 1} a_{ij} f^{(j)}(x_i), \qquad (1)$$

где заданные числа a_{ij} называются коэффициентами формулы (1), x_i — узлами, r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — кратностями соответствующих узлов. Формула (1) называется формулой гауссова типа, если она точна для всех многочленов степени $\leqslant p + n$, где $p = r_1 + r_2 + \ldots + r_n - 1$. Если формула (1) является формулой гауссова типа, то $a_{ij} = A[l_{ij}]$, где $l_{ij}(x)$ — фундаментальные многочлены Лагранжа — Эрмита, соответствующие узлам x_i с кратностями r_i. Показывается, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы формула (1) была формулой гауссова типа, является ортогональность в смысле функционала $A[f]$ многочленов $l(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)^{r_i}$ ко всем многочленам степени $\leqslant n - 1$, т. е. $A[l(x) Q(x)] = 0$, если $Q(x)$ — многочлен степени $\leqslant n - 1$. Не для всякого функционала $A[f]$ и не для всякой системы узлов x_i с кратностями r_i существует формула типа Гаусса. Говорят, что $A[f]$ имеет порядок положительности k, если $A[Q^2] > 0$ для всякого многочлена Q степени $k - 1$.

Рассматривается частный класс функционалов вида

$$A[f] = \sum_{j=1}^k \lambda_j f(y_j), \qquad (2)$$

где $\lambda_j > 0$ — числа, а y_j — заданные точки. Этот функционал имеет, очевидно, порядок положительности k. Доказывается, что для функционала вида (2) и для любого натурального $n < k$, и для любого множества кратностей узлов, состоящего только из нечетных чисел, существует формула типа Гаусса. То же самое имеет место и для любого функционала, если он имеет порядок положительности k и $k \geqslant \frac{1}{2}(p + n + 1)$. Дается достаточный критерий для того, чтобы функционал $A[f]$ имел порядок положительности k.

А. Н. Иванова

6880. О кратно-гармоническом анализе (II). Кобаяси (On the multi-harmonic analysis (II). Kobayashi T.), 氣象集誌 (Кисё сюси, J. Meteorol. Soc. Japan), 1955, **33**, № 2, 68—75 (англ.)

Ранее (РЖМат, 1955, 2401) автор предложил метод упрощения гармонического анализа для большого числа членов (наблюденных значений анализируемой величины), представимого в виде $m \times n$, где натуральные числа m и n взаимно простые. Здесь предлагается иной, более сложный способ, но пригодный для произвольных натуральных m и n. Метод, изложенный в виде рецепта, состоит в расположении наблюденных значений в виде матрицы размера $m \times n$, после чего производится повторный гармонический анализ. Этот метод иллюстрируется на числовом примере гармонического анализа с $144 = 12 \times 12$ членами.

А. Д. Мышкис

6881. Замечания к анализу кривых абсорбций. Беренц (Bemerkungen zur Analyse der Absorptionskurven. Berencz F.), Acta phys. Acad. sci. hung., 1955, **4**, № 4, 317—325 (нем.; рез. русс.)

Рассматриваются методы анализа абсорбционных кривых в спектроскопии, которые можно приближенно представить в виде суммы кривых погрешностей Гаусса. Анализируемая функция имеет вид:

$$f(x) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x - m_k)^2 / 2\sigma_k^2}, \qquad (1)$$

где m — абсцисса максимума k-й компоненты, σ_k — ее

разброс (половина расстояния между точками перегиба).

Если, исходя из (1), определить функцию

$$f^*(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}} e^{-(x-m_k)^2/2(\sigma_k^2-\lambda^2)}, \quad (2)$$

где λ — действительное число меньше самого меньшего значения σ_k, то компоненты функции $f^*(x)$ будут иметь свои максимумы в тех же местах, что и компоненты функции $f(x)$, но будут уже и выше последних, в результате чего и будут выявлены компоненты, которые дадут возможность определить необходимые спектроскопические данные.

Для получения $f^*(x)$ из $f(x)$ функции (1) и (2), заданные в интервале $(0, l)$, принимаются четно продолженными, и полученные таким образом в интервале $(-l, l)$ функции $\overline{f}(x)$ и $\overline{f}^*(x)$ разлагают в косинусные ряды Фурье, причем доказывается, что $R_n \simeq Q_n e^{(\lambda n\pi/\sqrt{2}\, l)^2}$, где R_n и Q_n — коэффициенты Фурье функций $\overline{f}^*$ и $\overline{f}$. То же самое следует сделать для получения $f^*(x)$ из $f(x)$.

Так как наименьшее значение λ заранее неизвестно, то следует произвести вычисления с несколькими возрастающими значениями λ и каждый раз рассмотреть, как выявляются составляющие компоненты.

Для проверки точности результатов анализа, получаемых указанным способом разложения, были проанализированы две спектрограммы в 3 различных участках каждой. Полученные приближенные компоненты были синтезированы и полученные кривые были сопоставлены с анализируемыми кривыми, причем выявились хорошие совпадения главных максимумов как по величинам, так и по занимаемым ими положениям.

М. Г. Серебренников

6882. **Заметка об аппроксимирующих полиномах для тригонометрических функций. Бут** (A note on approximating polynomials for trigonometric functions. Booth A. D.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, **9**, № 49, 21—23 (англ.)

Сообщаются результаты вычисления тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ на быстродействующих вычислительных машинах с использованием разложений их в ряды по полиномам Чебышева, если требуется высокая степень точности (9—10 десятичных знаков), или в ряды по полиномам Лежандра, если требуется меньшая степень точности (3—6 десятичных знаков). Приводится таблица значений первых 12 коэффициентов этих разложений с 11 десятичными знаками.

Н. А. Гречина

6883. **О численном интегрировании функций, табулированных в логарифмической форме. Якобья** (On the numerical integration of functions tabulated in logarithmic form. Jacchia Luigi), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, **9**, № 55, 63—65 (англ.)

Решается задача численного интегрирования функции $y(x)$ в промежутке от $x_0 - h$ до x_0, если заданы значения функции $\ln y$ в точках $x = x_0 + mh$. Используя интерполяционный многочлен Ньютона для функции $\ln y$, автор получает формулу

$$\ln\left(\frac{1}{h}\int_{x_0-h}^{x_0} y\,dx\right) = f_0 + N'\Delta' + N''\Delta'' + \ldots,$$

в которой коэффициенты $N^{(k)}$ выражаются некоторыми сходящимися рядами.

Э. Б. Карпиловская

6884. **Решение уравнений третьей и четвертой степеней. Миллингтон, Сим** (Solution of cubics and quartics. Millington G., Sim A. C.), Wireless Engr, 1955, **32**, № 1, 30 (англ.)

В связи со статьей Сима (Sim A. C., Wireless Engr, 1954, **31**, 294—300) Миллингтон предлагает буквенный метод решения уравнений третьей и четвертой степеней, который представляет собою некоторое видоизменение известных методов (Кардана и Феррари). Этот метод применим и к уравнениям с комплексными коэффициентами.

Сим указывает, что его метод позволяет решить уравнение, пользуясь исключительно счетной линейкой, между тем как метод Миллингтона, помимо того, что требует применения тригонометрических таблиц, в некоторых случаях связан с более сложными вычислениями.

М. С. Горнштейн

6885. **Решение уравнений и извлечение корней из суммы и разности квадратов на счетной линейке. Вендзинский** (Rozwiązywanie rownań i wyciąganie pierwiastków z symy albo różnicy kwadratów na suwaku rachunkowym. Wędziński Edmund), Gospod. wodna, 1955, **15**, № 5, 202—204 (польск.)

Описываются и предлагаются для использования в проектных организациях известные методы (см., например, Панов, Счетная линейка, М; ГИТТЛ, 1955) решения квадратных и кубических уравнений, извлечение корней из суммы и разности квадратов двух чисел на счетной линейке. Приводятся примеры на вычисление.

И. А. Ковалев

6886. **Разложение $2^{1/3}$ в непрерывную дробь. Нёйман, Таккерман** (Continued fraction expansion of $2^{1/3}$. Neumann John von, Tuckerman Bryant), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, **9**, № 49, 23—24 (англ.)

На примере $2^{1/3}$ авторы сравнивают статистики разложений вещественных алгебраических чисел в непрерывные дроби с известными распределениями этих статистик по случайным числам (Khintchine A., Compositio math., 1935, **1**, 361—382). Результат сообщается в предварительном порядке без доказательств.

Н. А. Гречина

6887. **Замечания к развитию численных методов для вычислительных машин с программным управлением. I. Улучшение сходимости метода Бернулли—Якоби нахождения корней многочленов. Бауэр** (Beiträge zur Entwicklung numerischer Verfahren für programmgesteuerte Rechenanlagen. I. Quadratisch konvergente Durchführung der Bernoulli-Jacobischen Methode zur Nullstellenbestimmung von Polynomen. Bauer Friedrich L.), Sitzungsber. math.-naturwiss. Kl. Bayerischen Akad. Wiss. München, 1954 (1955), 275—303 (нем.)

По методу Бернулли корень с наибольшим модулем (если нет другого не равного ему корня с таким же модулем) уравнения

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad (1)$$

определяется как $\lim_{i\to\infty} \alpha_{i+1}/\alpha_i$, где α_i — решение разностного уравнения $\alpha_{i+n} + a_1\alpha_{i+n-1} + \ldots + a_n\alpha_i = 0$. Якоби продолжил метод Бернулли, сделав его более удобным для нахождения комплексных корней. Автор дает метод («сокращенной итерации»), который сокращает вычисления по методу Бернулли — Якоби и обладает квадратичной сходимостью. Для этого он предварительно предполагает, что корни ξ_ν уравнения (1) простые и что $|\xi_1| \geqslant |\xi_2| \geqslant \ldots \geqslant |\xi_n| > 0$. Пусть $Q^{(0)}(x)$ — многочлен степени $\leqslant n-1$. Разлагая дробь $Q^{(0)}(x)/P(x)$ на простейшие, получим после освобо-

ждения от знаменателя $Q^{(0)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu P_\nu(x)$, где $e_\nu = Q^{(0)}(\xi_\nu) : P'(\xi_\nu)$, $P_\nu(x) = P(x) : (x - \xi_\nu)$. Дальше вводится последовательность многочленов

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu \xi_\nu^i P_\nu(x). \qquad (2)$$

Для этих многочленов имеет место рекуррентная формула $Q^{(i+1)}(x) = xQ^{(i)}(x) - \alpha_i P(x)$. Из (2) видно, что если $|\xi_1| > |\xi_2|$, то $\lim_{i\to\infty} Q^{(i)}(x)$ пропорционален $P_1(x)$ (т. е. отличается от $P_1(x)$ на постоянный множитель). Следовательно, в случае сходимости можно таким способом непосредственно найти многочлен $P_1(x)$, в котором отсутствует корень ξ_1.

Метод сокращенной итерации состоит в том, что по рекуррентной формуле вычисляются не все многочлены $Q^{(i)}(x)$, а именно: если принять $Q^{(0)}(x) = 1$ и по рекуррентной формуле вычислить n многочленов $Q^{(k)}, \ldots, Q^{(k+n-1)}$ и если один из них $Q^{(k+\nu)}$ имеет вид $Q^{(k+\nu)} = \gamma_1^{(\nu)} x^{n-1} + \ldots + \gamma_n^{(\nu)}$, то сразу получается $Q^{(2k+\nu)} = \gamma_1^{(\nu)} Q^{(k+n-1)} + \ldots + \gamma_n^{(\nu)} Q^{(k)}$. На основании этого свойства можно поступить следующим образом. Вычислить по рекуррентной формуле n последовательных многочленов $Q^{(n)}, \ldots, Q^{(2n-1)}$. Составив из них линейную комбинацию, множителями которой служат коэффициенты при x в последнем многочлене, получим $Q^{(3n-1)}$. Если затем по рекуррентной формуле найти многочлены $Q^{(3n)}, \ldots, Q^{(4n-2)}$, то линейная комбинация многочленов $Q^{(3n-1)}, \ldots, Q^{(4n-2)}$ с коэффициентами последнего в качестве множителей этой комбинации даст многочлен $Q^{(7n-3)}$ и т. д. Вообще после j-го шага получится многочлен $Q^{(\beta_j)}$, где $\beta_j = (2n-1)\cdot 2^j - (n-1)$. Автор приводит еще другие варианты сокращенной итерации. Затем он применяет этот метод для получения многочлена, не содержащего r первых корней с равными модулями $\xi_1, \ldots, \xi_r$, если $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$, и рассматривает также случай кратных корней. Дается векторная и матричная интерпретации метода. Вопрос о практическом его применении будет разобран в отдельной статье. М. С. Горнштейн

6888. О видоизмененных разделенных разностях. I. Б л а н ч (On modified divided differences. I. B l a n c h G e r t r u d e), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 45, 1—11 (англ.)

Для функции $u = u(x)$ вместо обычных разделенных разностей $[x_0 x_1 \ldots x_n]$ вводятся видоизмененные разности $[w; x_0 x_1 \ldots x_n] = w^n n! [x_0 x_1 \ldots x_n]$. В качестве w принимается величина $\sum_{k=1}^{N-1} |x_k - x_{k-1}| : (N-1)$, где N — число узлов интерполяции. В случае равноотстоящих узлов $w = h$ и $[w; x_0 \ldots x_n] = \Delta^n u_0$. Если узлы интерполяции x_k образуют монотонную последовательность и все разности $x_k - x_{k-1}$ одного порядка, видоизмененные разделенные разности аналогичны разностям Δ^n: первая отброшенная разность при составлении интерполяционного полинома характеризует его погрешность; удобны действия по последовательному вычислению видоизмененных разделенных разностей на машине с фиксированной запятой.

Изучается влияние изолированной ошибки в таблице на видоизмененные разделенные разности; приводятся признаки такой ошибки и оценки ее величины, исходя из возникающей, вследствие такой ошибки, нерегулярности в видоизмененных разделенных разностях n-го порядка. Приведен пример отыскания изолированных ошибок в таблице с неравностоящими значениями аргумента. М. Л. Бродский

6889. О видоизмененных разделенных разностях. II. Б л а н ч (On modified divided differences. II. B l a n c h G e r t r u d e). Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 46, 67—75 (англ.)

Часть I см. реф. 6888. Допустим теперь, что табличные значения u_i содержат случайные погрешности (например, ошибки округления). Исследуется их влияние на разности, определяется верхний предел случайных погрешностей разностей, чтобы судить о достаточно больших изолированных ошибках по их влиянию на разности. В предположении, что погрешности всех u_i равномерно распределены на сегменте $[-a/2, a/2]$, изучается (методом характеристических функций) распределение случайной величины $w = \sum_{i=1}^{n} A_i u_i$. Если w — третья разность в случае равноотстоящих узлов, для него справедливо «правило 2,4 σ», так как распределение w отличается от нормального с тем же σ в сторону более быстрого убывания при удалении от среднего значения w. Для видоизмененных разностей с целью упрощения вычислений предлагается вычислить их среднее квадратичное уклонение σ и принять, что погрешность не превосходит 2,4 σ. Рассматриваются также погрешности от неточного выполнения арифметических действий при образовании видоизмененных разделенных разностей. Оценка ухудшается (до 2,8 σ), если производить арифметические действия без запасных знаков. М. Л. Бродский

6890. Новая аппроксимация обратной величины π. Р е н ч (A new approximation to the reciprocal of π. W r e n c h J. W., Jr), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 45, 49—51 (англ.)

Приводится значение π^{-1} с 2037 десятичными знаками и дается краткое описание процесса его вычисления. Л. Н. Кармазина

6891. Одно уравнение для сигмоидных кривых. Д е й в и с (An equation for sigmoid curves. D a v i s D. S.), Virginia J. Sci., 1954, 5, № 2, 65—67 (англ.)

«Сигмоидные» кривые встречаются в теории электролиза (пример в тексте) и в других разделах физики и химии. Ранее для аппроксимации таких кривых предлагалось уравнение Гомпертца: $y = \alpha + ab^{c^x}$; автор предлагает уравнение $\lg[20y/\lg(100-y)] = (x-x_1)/(a+bx)$, где a, b и x_1 подбираются. М. Л. Бродский

6892. О теории релаксации. М и т ч е л л, Р о з е р ф о р д (On the theory of relaxation. M i t c h e l l A. R., R u t h e r f o r d D. E.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1953, 1, 101—110 (англ.)

Авторы обсуждают с общей математической точки зрения различные релаксационные и итеративные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (с акцентом на системы, возникающие из конечно-разностных аппроксимаций задач дифференциальных уравнений). Они заканчивают обсуждением применения метода релаксации к обыкновенному дифференциальному уравнению и к задаче уравнения теплопроводности с граничными и начальными значениями. E. Isaacson

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 353

6893. Воспроизведение псевдослучайных чисел на машине, работающей по десятичной системе счисления. М о ш м а н (The generation of pseudo-random numbers on a decimal calculator. M o s h m a n J a c k), J. Assoc. Computing Mach., 1954, 1, 88—91 (англ.)

Если имеется быстродействующая универсальная вычислительная машина, работающая по десятичной системе счисления, то каков практический путь воспроизведения большого количества случайных цифр?

Автор принимает метод, основанный на теории биномиальной конгруэнции по модулю 10^n, где длина слова машины есть n десятичных цифр. Этот метод есть десятичная аналогия метода, предложенного Тауски-Тодд для машин, работающих по двоичной системе счисления, и состоит в формировании C_i по рекуррентному соотношению: $C_i \equiv 7 \cdot_k C_{i-1} (\mathrm{mod}\, 10^n)$, где $0 < C_i < 10^n$, $k = 5, 9, 13$ или 17. Автор берет $C_0 = 1$. Доказываются теоремы, дающие длину периода последовательности. При $n = 11$ на вычислительной машине УНИВАК последовательность 10 000 одиннадцатизначных десятичных чисел была подвергнута пяти тестам различной частоты, имеющим дело с появлением цифр в фиксированном разряде. Ведущие разряды дают хорошие результаты, но ко времени достижения шестых разрядов период становится слишком коротким (только 5000) и результаты слишком однообразны. Этот недостаток метода может быть устранен при использовании слегка различных модулей вида $10^n \pm a$, где a — небольшое положительное целое число.

D. H. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 10, 900

6894. Преобразования графиков и их приложения. Берни (Transformazione di abachi ed applicazioni. Berni Arminio), Ingegneria mecc., 1955, 4, № 12, 5—8 (итал.)

Описаны элементарные геометрические построения для нахождения по точкам $y_i = f(x_i)$ заданной в декартовых координатах кривой $y = f(x)$ соответствующих точек кривых

$y_1 = xy / u$; $y_2 = y^2 / u$; $y_3 = x \cdot y_2 / u = x \cdot y^2 / u^2$ (u=const)

и простой способ определения направлений касательных в этих точках, если известны направления касательных в точках кривой $y = f(x)$. Далее обычным графическим способом строится интегральная кривая $z(x) = \int_a^x y dx$ и кривые $z_n(x) = \int_a^x y_n dx$ ($n = 1, 2, 3$). Если данная кривая $y = f(x)$ ограничивает простую площадь на сегменте $[a, b]$ и $z(a) = z_n(a) = 0$, то величина ординаты $z(b)$ пропорциональна этой площади, $z_1(b)$ — статическому моменту ее относительно оси y, $z_2(b)$ — статическому моменту относительно оси x. По этим величинам графическими же построениями легко найти абсциссу $\xi = z_1(b) / z(b)$ центра тяжести площади и ординату ее $\eta = z_2(b) / z(b)$, а также абсциссу $z_3(b) / z_2(b)$ центра тяжести тела, образованного вращением вокруг оси x простой площади, ограниченной кривой $f(x)$. Изложение построено в символических обозначениях геометрического исчисления Пеано. Отмечается простота всех описанных построений и удобство применения их в инженерной расчетной практике, особенно при условии выполнения на миллиметровой бумаге.

А. Б. Штыкан

6895. Методика построения номограмм с ориентированным транспарантом. Хованский Г. С., Вычисл. матем. и вычисл. техника, сб. 2, 1955, 3—93.

Описываются номограммы с ориентированным транспарантом; статья состоит из 39 параграфов и введения. В первых десяти параграфах указаны: каноническая система уравнений, разрешаемая номограммой с ориентированным транспарантом $f_{12} - f_7 = f_{34} - f_8 = f_{56} - f_9$, $g_{12} - g_7 = g_{34} - g_8 = g_{56} - g_9$, где индексы указывают на номера переменных, входящих в соответствующие функции; геометрическая структура номограмм; правила пользования номограммами; возможные преобразования номограмм и их практическое осуществление. В §§ 11 и 12 приведены условия, когда шкалы транспаранта — прямолинейные и, в частности, транспарант может иметь форму линейки. В §§ 13—15 рассмотрено номографирование канонической формы $f_{12} - f_5 = f_{13} - f_6 = f_{14} - f_7$ (последние два уравнения основной системы отсутствуют) и особенности соответствующих ей номограмм.

В § 16 приведены номограммы системы вида $f_{12} = f_{34} = f_{56}$; $g_{12} = g_{34} = g_{56}$, которые могут быть построены с транспарантом, состоящим из прямой с тремя фиксированными точками на ней. Автор указывает, что такие номограммы для вычислений по ним удобнее сетчатых, которые в этом случае также можно построить. В § 17 приведены схемы номограмм уравнений с шестью переменными, которые получаются из четырех уравнений основной канонической формы исключением трех из девяти переменных. Указываются номограммы различных геометрических структур в зависимости от того, какие из переменных исключаются; в частности приведены гексагональные номограммы (§ 18) и номограммы с тремя концентрическими окружностями на транспаранте (§ 19) и соответствующие им канонические формы уравнений. В § 20 изложено номографирование системы уравнений $f_{12} - f_5 = f_{34} - f_6$; $g_{12} - g_5 = g_{34} - g_5$. В § 21 приведены канонические формы уравнений с пятью переменными, особенности номографирования которых изложены далее: в § 22 — канонической формы $F(\alpha_3, f_{12} + f_6 - f_5, g_{12} + g_6 - g_5) = 0$; в § 23 — $\Phi(\alpha_3, (\varphi_{12} / \varphi_5)\varphi_6, (\psi_{12} / \psi_5)\psi_6) = 0$; в § 24 — $F(f_{34} - f_{12} + f_5, g_{34} - g_{12} + g_5) = 0$; в § 25 — $\Phi((\varphi_{34} / \varphi_{12})\varphi_5, (\psi_{34} / \psi_{12})\psi_5) = 0$. § 26 посвящен особенностям представления уравнений с пятью переменными номограммами с транспарантом в виде линейки. Здесь из общей канонической формы получены канонические формы уравнений, представляемых такими номограммами. Далее рассмотрено номографирование канонических форм: $f_{12} - f_5 = f_{13} - f_6$ (§ 27); $f_5 + h_3 g_{12} - f_{12} = f_6$ (§ 28); $h_3 \pm (\varphi_6 / \varphi_5)\varphi_{12} + \psi_{12} = 0$ (§ 29); канонической формы Коши (§ 30); $F(\alpha_3, f_{12} - f_5, g_{12} + g_6) = 0$ и $\Phi(\alpha_3, \varphi_{12} / \varphi_5, \psi_{12} / \psi_6) = 0$, которые изображаются номограммами с транспарантом в форме прямоугольника, $u_{34} - u_{12} + u_5 = 0$ (§ 32). В § 33 дано представление уравнений с тремя переменными номограммами с транспарантом в форме линейки. § 34 содержит сводку простейших канонических форм уравнений с шестью, пятью и четырьмя переменными. В §§ 35, 36, 37, 38 и 39 приведены подробно разобранные примеры построения номограмм соответственно для: 1) гидравлического расчета прямоугольных лотков; 2) расчета критических глубин в трапецоидальных каналах; 3) определения коэффициента Шези по формулам Маннинга, Форхеймера, Павловского, Агроскина и сокращенной формуле Гангилье — Куттера; 4) определения глубины водобойного колодца; 5) определения средней логарифмической разности температур. Все номограммы с транспарантом в виде линейки. Они приведены в статье и могут служить для практических расчетов. Библ. 12 назв.

М. В. Пентковский

6896. Номографирование таблиц. Бахвалов С. В., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, 21, 81—82

Показан способ представления номограммой с тремя параллельными шкалами переменных x, y и z таблицы функции $z = z(x, y)$ частного вида: когда x и y принимают соответственно значения $i = 0, 1, \ldots, n$ и $k = 0, 1, \ldots, m$, значения $z_{i,k}$ составляют монотонно возрастающую последовательность с ростом i для каждого k, причем всегда $z_{n,k} < z_{0,k+1}$. Зависимость $z = z(x, y)$ аппроксимирована выражением $L(z) = x + (n+1)y$, где

$$L(z) = \sum z_{i,k} H(z)(x_i + (n+1)y_k) / (z - z_{i,k}) H'(z_{i,k}),$$

причем $H(z) = (z - z_{0,1})(z - z_{1,1}) \ldots (z - z_{n,m})$.

М. В. Пентковский

6897. О номограммах с бинарными полями. Бахвалов С. В., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, 21, 73—80

Даны необходимые и достаточные условия представления функции

$$C_1(U_1, \ldots, U_k) P_{23}(V_1, \ldots, V_m) + C_2(U_1, \ldots, U_k) \times \times P_{13}(V_1, \ldots, V_m) + C_3(U_1, \ldots, U_k) P_{12}(V_1, \ldots, V_m) \quad (1)$$

в виде определителя Массо, умноженного на некоторую функцию $\sigma(V_1, \ldots, V_m)$,

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \times \sigma(V_1, \ldots, V_m), \quad (2)$$

где $A_i = A_i(V_1, \ldots, V_n)$ и $B_i = B_i(V_{n+1}, \ldots, V_m)$, и способ приведения (1) к виду (2). Келлог рассмотрел эту задачу раньше для $k = 1$ и $m = 2$. Работа набрана типографией небрежно, содержит опечатки (например, в формуле 2, формуле 15 . . .); одни и те же переменные обозначены и большими и малыми буквами. Библ. 3 назв. М. В. Пентковский

6898. О нахождении первых и вторых производных функций графо-аналитическим способом. Матвеенко А. А., Научн. зап. Одесск. политехн. ин-та, 1954, **3**, 23—29

Для вычисления производных в точке x функции $y = f(x)$ график функции на отрезке $[x_1 < x < x_2]$ заменяется или дугой окружности, или дугой параболы с осью, параллельной оси y. Параметры окружности определяются или графически, или аналитически из условия, что окружность проходит через три заданные точки x_1, x и x_2; параметры параболы определяются аналитически из тех же условий. Значения производных находятся аналитически. Оценка погрешности аппроксимации и указания на лучший способ выбора точек x_1 и x_2 не приводятся. М. В. Пентковский

6899. О номографическом решении алгебраических уравнений. Хумал (Algebraliste võrrandite nomograafilisest lahendamisest. Humal A.), Eesti Nsv teaduste akad. toimetised. (Изв. АН ЭстССР), 1954, **3**, № 1, 69—88 (эст.; рез. русс.)

Для уравнения $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ приведены графический способ решения отысканием точек пересечения соответствующих параболы и окружности, номограмма из выравненных точек и сетчатая, после приведения уравнения к виду $x^4 + ax^2 + x + b = 0$, номограммы, позволяющие вычислять комплексные корни. Для уравнения $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ приведены графический способ решения отысканием точек пересечения кривой $y = x^4 + 1/x$ и параболы, причем на основании исследования числа точек пересечения этих линий делается заключение о числе действительных решений уравнения в зависимости от соотношений между его коэффициентами; две номограммы с бинарными полями (x, B) для уравнения, приведенного к виду $x^5 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 1 = 0$. М. В. Пентковский

6900. О номографируемости уравнений. Смирнов С. В., Уч. зап. Иван. пед. ин-та, 1953, **4**, 22—60

Рассматривается вопрос об отыскании анаморфозы в смысле Гронваля (Gronwall T. H., J. math., 1912, 6 ser., **8**, 59—102) для уравнения с тремя переменными $z = \varphi(x, y)$. Именно ставится задача отыскания по заданной в некоторой области g функции $\varphi(x, y)$ таких функций f_i, g_i $(i = 1, 2)$, f, g, что для уравнения Массо

$$\Delta(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_1(x), & g_1(x), & 1 \\ f_2(y), & g_2(y), & 1 \\ f(z), & g(z), & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

оказывается справедливым в области g тождество $\Delta(x, y, \varphi(x, y)) \equiv 0$. В первой главе работы (стр. 26—43) излагаются результаты Гронваля; в это изложение внесены существенные уточнения формулировок и некоторые упрощения отдельных доказательств. Во второй части работы (стр. 44—60) показывается, что необходимые и достаточные условия номографируемости, данные Гронвалем, приводятся к существованию общего корня системы полиномов с целочисленными коэффициентами от неизвестной функции $C(x, y)$, от функции $M(x, y)$ и ее частных производных. Далее показывается, что в общем случае система дифференциальных уравнений Гронваля эквивалентна некоторой системе уравнений в частных производных первого порядка; условие совместности этой последней системы, а следовательно, и условие анаморфозы, приводится к совместности системы алгебраических уравнений. Решение системы уравнений Гронваля, позволяющее фактически вычислить элементы анаморфозы (1), может быть найдено также алгебраически, как решение системы уравнений, левые части которых — полиномы от неизвестных функций, данной функции M и ее частных производных (алгебраическая ассоциированная система). Условие номографируемости в смысле Гронваля выражено следующей теоремой: Уравнение $z = \varphi(x, y)$ такое, что $M = \varphi_y / \varphi_x$ — достаточно гладкая функция в области g, номографируемо в этой области тогда и только тогда, когда в g справедливо тождество $P = 0$ или в каждой подобласти g^+ области g: 1) P отлично от тождественного нуля; 2) существует совместная ассоциированная система, обладающая вещественным решением; 3) дифференциальная форма

$$\omega = -M^{-1}(C\,\partial M / \partial x + z_2 - 2z_1 + \partial N / \partial x)\,dx + (2z_2 - z_1)\,dy$$

представляет полный дифференциал функции $C(x, y)$; $\omega = dC$. С помощью определенной из ассоциированной системы функции $C(x, y)$ находятся по способу Гронваля элементы анаморфозы (1) данного уравнения $z = \varphi(x, y)$. П. В. Николаев

6901. Разделение переменных в номографии. Бал, Радо (Separarea variabilelor în nomografie. Bal Lascu, Rado Francisc), Comun. Acad. R.P.R., 1955, **5**, № 2, 303—305 (рум.; рез. русс., франц.)

Устанавливаются условия, необходимые и достаточные, чтобы уравнение $F(u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}) = 0$ можно было написать в форме $u_{n+1} = \Phi[\varphi^1(u_1, \ldots, u_{n_1}), \varphi^2(u_{n_1+1}, \ldots, u_{n_2}), \ldots, \varphi^r(u_{n_{r-1}+1}, \ldots, u_{n_r}), u_{n_r+1}, \ldots, u_n]$. Найденные условия применяются для установления возможности решения уравнения со сложными номограммами. Из резюме автора

6902. О номографировании с точностью до малых высшего порядка. Крейнес М. А., Айзенштат Н. Д., Матем. сб., 1955, **37**, № 2, 337—352

Подробное изложение заметки, уже реферировавшейся (РЖМат, 1955, 2408). Разобран особый случай, когда в данной точке x_0, y_0 одна или обе первые производные функции $f(x, y)$ обращаются в нуль. С. В. Смирнов

6903. Циркульные номограммы некоторых алгебраических уравнений. Никулин Н. А., Изв. Крымск. пед. ин-та, 1955, **21**, 201—209

Описан способ приближенного решения некоторых простейших алгебраических уравнений при помощи циркульных номограмм. Отмечена возможность распространения циркульных номограмм из равноудаленных точек на уравнения с многими неизвестными путем замены простых шкал бинарными, либо построением составных абаков из равноудаленных точек. В качестве примеров рассмотрены решения приведен-

ного уравнения второй степени, трехчленного уравнения третьей степени и четырехчленного уравнения четвертой степени при помощи одной и той же номограммы. А. Б. Штыкан

6904. **Номограммы для нахождения квадратного корня из комплексных чисел.** Кизава (Nomogramm of square root of complex numbers. Kizawa Makoto) (複素數の平方根 $\sqrt{x+jy}$ のノモグラム. 木澤誠), 電氣試驗所彙報 (Дэнки сикэнсё ихо), 1954, 18, № 2, 131—133 (япон.)

Приводится номограмма соотношений между x, y, u, v, определяемых равенством $u+vj=\sqrt{x+yi}$.

6905. **Об одном численно-графическом методе, поясненном примером из кинематики двигателей типа ∨ и звездообразных моторов.** Вармус (O pewnej metodzie numeryczno-graficznej, zilustrowanej przykładem z kinematyki silników w układzie ∨ i gwiazdowych. Warmus M.), Zastosow. mat., 1954, 2, № 1, 67—82 (польск.; рез. русс., англ.)

Указывается элементарный итерационный процесс для решения сложной системы уравнений. Для облегчения большого количества вычислений, связанных с осуществлением этого процесса, автор приводит номограмму с параллельными шкалами, построенную для соотношения $\sin z = y \sin x$ так, что имеется возможность получать большую точность. И. Н. Денисюк

6906. **Графический расчет турбины Пельтона.** Стоянов (Графическо изчисление на Пелтонтурбина. Стоянов Ст. М.), Техника (София), 1955, 4, № 6, 37—39 (болг.)

Приводятся 2 номограммы, содержащие семейства кривых, расположенных по квадрантам. По этим номограммам возможно производить определение конструктивных элементов сопла и лопаток гидротурбины Пельтона. И. Н. Денисюк

6907. **Номограмма для определения падения давления при впуске пара в цилиндры локомотива.** Бюттнер (Nomogramm zur Ermittlung des Spannungsabfalles beim Einströmen des Dampfes in den Lokomotivzylinder. Büttner Siegfried), Dtsch. Eisenbahntechn., 1954, 2, № 10, 367—370 (нем.)

Автор приводит составной абак, расположенный в 4 квадрантах, и несколько дополнительных абаков и графиков, позволяющих быстро определить падение давления по данным, взятым из индикаторной диаграммы. И. Н. Денисюк

6908. **Номографические методы решения в паротурбо- и генераторостроении.** Млудек (Nomographische Lösungsmethoden im Dampfturbinen- und Generatorenbau. Mludek H.), Maschinenbautechnik, 1955, 4, № 3, 158—164 (нем.)

Автор приводит несколько абаков, позволяющих определять собственные частоты вала турбогенератора при различном количестве и расположении коренных подшипников. Кроме того, приводится одна номограмма с тремя параллельными шкалами и одним элементом в виде движущегося перпендикулярно одной из шкал криволинейного шаблона. И. Н. Денисюк

6909. **Номограммы для определения потерь давления жидкостей в трубах** (Abaques pour le calcul des pertes de charge des liquides dans les conduites), Bull. Assoc. franç. techniciens pétrole, 1954, № 105, 227, 231—234 + 2 nomogrammes (франц.)

Приводится номограмма с семейством ломаных, помеченных значениями вязкости, дающими потерю давления на километр в зависимости от скорости (или расхода). Различные участки каждой ломаной соответствуют случаям ламинарного и турбулентного режимов. И. Н. Денисюк

6910. **Номограмма для определения магнитного силового поля в тонких цилиндрических катушках.** Шварц (Nomogramme zur Ermittlung der magnetischen Feldstärke in dünnen zylindrischen Spulen. Schwarz Eleonore), Dtsch. Elektrotechnik, 1954, 8, № 3, 83—87+Tab. auf S. 105 a (нем.)

Рассматривается задача определения магнитного силового поля в окрестности тонкой цилиндрической катушки высоты $2h$, внутреннего радиуса R_1 и внешнего радиуса R_2. Через $R=(R_1+R_2)/2$ обозначается средний радиус и через $2d=R_2-R_1$ — толщина катушки. Вводятся цилиндрические координаты z, r в осевом сечении катушки, где оси z и r направлены соответственно по оси и радиусу катушки. В формулах вычисления H_r^* и H_z^* — радиальной и аксиальной составляющих поля, данных Вейгандом (Weigand, Dtsch. Elektrotechnik, 1952, 6)

$$H_r^*(\bar r,\bar z)=\frac{2}{\pi}\frac{IW}{h}\left\{\frac{\bar r C(k_1^*)}{[(1+\bar r)^2+\gamma^2(1-\bar z)^2]^{3/2}}-\right.$$
$$\left.-\frac{\bar r C(k_2^*)}{[(1+\bar r)^2+\gamma^2(1+\bar z)^2]^{3/2}}\right\}, \qquad (1)$$

$$H_z^*(\bar r,\bar z)=\frac{\gamma}{4\pi}\frac{IW}{h}\left\{\frac{(1-\bar z)K(k_1^*)}{\sqrt{(1+\bar r)^2+\gamma^2(1-\bar z)^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{(1+\bar z)K(k_2^*)}{\sqrt{(1+\bar r)^2+\gamma^2(1+\bar z)^2}}+\frac{\pi}{2\gamma}[\lambda_0(\alpha_1^*,\beta_1^*)+\lambda_0(\alpha_2^*,\beta_2^*)]\right\} \qquad (2)$$

введены безразмерные величины $\bar r=r/R$; $\bar z=z/h$; $\gamma=h/R$; при этом k_i^*, α_i^*, β_i^* определяются формулами

$$k_1^{*2}=\sin^2\alpha_1^*, \qquad (3)$$

$$k_2^{*2}=\sin^2\alpha_2^*, \qquad (4)$$

$$\sin\beta_1^*=\frac{\gamma(1-\bar z)}{\sqrt{(1-\bar r)^2+\gamma^2(1-\bar z)^2}}, \qquad (5)$$

$$\sin\beta_2^*=\frac{\gamma(1+\bar z)}{\sqrt{(1-\bar r)^2+\gamma^2(1+\bar z)^2}}. \qquad (6)$$

В формулах (1) и (2) $C(k_i^*)$ и $K(k_i^*)$ означают эллиптические интегралы второго рода и $\lambda_0(\alpha_i^*,\beta_i^*)$ — эллиптические интегралы третьего рода. В статье даны сетчатые номограммы для определения H_r^* и H_z^* по формулам (1)—(6). П. В. Николаев

6911 Д. **О численном решении дифференциальных уравнений в частных производных.** Хайман (On the numerical solution of partial differential equations. Hyman M. A. Thesis, Technische Hogeschool te Delft, 1953; 108 p.) (англ.; рез. голл., франц.)

Монография разделяется на четыре части и дополнение; обращается особое внимание на численные методы, которые хорошо могут быть реализованы на автоматических вычислительных машинах. В части 1 (общей) исследуется сходимость и устойчивость решений разностных уравнений (см. работу автора, O'Brien, Hyman, Kaplan, J. Math. Phys., 1951, 29, 223—251). В части 2 (Параболические уравнения) рассматривается сходимость и «экстраполяция» разностных решений. Часть 3 (Эллиптические уравнения) содержит

различные известные методы (прямые, итеративные, Монте-Карло) для решения краевых задач (Hyman, Appl. Sci. Research, 1952, **B2**, 325—351). Часть 4 (Гиперболические уравнения) включает новые методы, предназначенные для вычислений на машине, по расчету течения газа с сильной ударной волной; «3-характеристические» вычисления сводятся к «2-характеристическим» вычислениям посредством введения другой, более простой, «3-характеристической» проблемы. В дополнении решается нелинейное уравнение в частных производных 4-го порядка, встречающееся в турбулентной теории. Включена подробная (1899—1953 гг.) библиография. H. Polachek

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8,746

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

6912. **Применение цифровых машин для моделирования в истинном масштабе времени. Рубинов** (Digital computers for real-time simulation. Rubinoff Morris), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, **2**, № 3, 186—204 (англ.)

Обосновывается возможность и целесообразность использования цифровых машин для моделирования реальных процессов и устройств. Указывается на преимущества такого цифрового моделирующего устройства, заключающиеся в возможности перехода от моделирования одних задач к моделированию других без изменения конструкции устройства и в большой точности моделирования. Устанавливаются условия осуществимости моделирования в истинном масштабе времени с помощью цифровых машин, требующие наличия быстродействующей машины и кодирующего и декодирующего оборудования, осуществляющего связь этой машины с регистрирующими приборами и моделируемыми реальными объектами.

Необходимым условием для возможности моделирования в истинном масштабе времени с помощью цифровой машины является также устойчивость решений решаемых математических зависимостей и разумная точность этих решений. Описывается решение подобных задач применительно к полетному тренажеру, построенному на базе специально разработанной для этой цели универсальной цифровой вычислительной машины, работающей в истинном масштабе времени в соединении со вспомогательным оборудованием, общим для всех обычных тренажеров.

Машина работает на частоте 1 *Мец*. Система программирования одноадресная. Передача информации последовательно-параллельная. Описываемая машина имеет скорость в 70 раз бóльшую, чем УНИВАК, несмотря на то, что используемая ею частота вдвое меньше.

На всю машину, состоящую из арифметического блока, блока управления, двух блоков запоминающего устройства и кодирующего и декодирующего оборудования, требуется 1750 ламп и 25 000 диодов.

В качестве входных устройств использованы механические коммутирующие диски, кодированные рефлексным двоичным кодом, а в качестве выходного устройства использована разрядная суммирующая схема на сопротивлениях, выход которой в виде напряжения распределяется во времени между соответствующими управляемыми объектами с помощью специального многоканального распределительного устройства. Точность работы этих устройств равна 0,1%. Скорость входного преобразования составляет 5 *μсек.* на десятиразрядное двоичное число. Скорость выходного преобразования составляет 100 *μсек.* на одно число и определяется в основном постоянной времени многоканального распределительного устройства. Приводятся принципиальные схемы выходного декодирующего устройства и многоканального распределителя и подробное описание принципов их работы.

Большое место при цифровом моделировании в истинном масштабе времени занимают вопросы выбора формулы численного решения дифференциальных уравнений, дающей минимальную ошибку, а также максимально допустимого — из соображений точности и устойчивости, с одной стороны, и потребного времени вычислений, с другой — шага интегрирования. Однако непосредственно этот вопрос не может быть решен ввиду невозможности предсказания характера поведения внешних сил, определяющих решения соответствующих дифференциальных уравнений моделируемой системы.

Предлагаемый в статье оригинальный метод подхода к решению этой задачи основывается на использовании так называемых «диаграмм устойчивости» и требует знания лишь частотной характеристики моделируемой системы во всех ее физически возможных динамических состояниях. Математической базой такого решения вопроса является исследование устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью критерия Ляпунова по первому приближению.

Приводятся «диаграммы устойчивости» для двух формул численного интегрирования (более точной и менее точной), из которых определяется максимально допустимый шаг интегрирования для данной формулы, при котором еще получается устойчивое решение. Для иллюстрации получаемых результатов приводятся также временные характеристики одного из моделируемых параметров полета, рассчитанные по выбранным для сравнения двум формулам численного интегрирования, из которых можно судить об устойчивости и точности решения по данным формулам. Б. И. Стрелков

6913. **Роль цифровой вычислительной машины в процессе обработки данных об управляемых снарядах. Моррис** (The role of the digital computer in processing guided missile data. Morris Harold N.), IRE Convent. Rec., 1955, **3**, № 10, 62—65 (англ.)

Рассматривается применение вычислительной машины ФЛАК (FLAC — Florida Automatic Computer) для обработки данных об управляемых снарядах. Машина ФЛАК была построена специально для Испытательного центра управляемых снарядов воздушных сил США, где она служит для определения траекторий управляемых снарядов, скорости, ускорения и других полетных характеристик. Данные, с которыми приходится оперировать машине, могут быть получены либо путем оптических замеров, либо путем радиолокации, либо путем телеметрии. Указывается, что из этих трех типов данных пока для машины использовались только оптические данные. Однако по использованию данных двух других типов ведутся исследования. Оптические данные получаются путем записи на кинопленку показаний нескольких теодолитов. На ту же пленку записываются, кроме того, временные отметки для того, чтобы можно было сопоставить данные разных теодолитов. Данные считываются с кинопленки специальными устройствами и переносятся на перфоленту, а с нее на магнитную проволоку, с которой они вводятся

в машину. Для устранения ошибок машина сопоставляет данные, полученные от разных теодолитов, и продолжает вычисления только в случае их совпадения. Время вычислений на точку при определении траектории составляет 7 сек., против 20—25 мин. при вычислениях на расчетном столе.

Рассматриваются общие принципы построения системы для обработки телеметрических данных. Указывается, что в этом случае должен быть предусмотрен автоматический контроль входных данных. Приведена фотография вычислительной машины ФЛАК.

А. И. Щуров

6914. Электронная вычислительная машина «Гамма» (The «Gamma» electronic calculating machine), Techn. franç., 1955, **3**, № 1—3, 24—28 (англ.)

Дается краткая характеристика французской электронной вычислительной машины «Гамма» фирмы «Булль» (РЖМат, 1954, 1839—1840; 1955, 3453). «Гамма» работает как приставка к табулятору и репродуктору. Исходные данные воспринимаются с перфокарт, вычисленные результаты могут быть отпечатаны, а также выведены на перфокарты; вычисления осуществляются в период между восприятием данных с перфокарт.

За один час машина выполняет 432 000 операций. Машина в основном предназначена для механизации учетных и статистических работ, но может быть также успешно использована для математических и инженерных расчетов. Фирмой выпущено более 100 экземпляров машины.

М. Г. Раппопорт

6915. Управление полетом и цифровая вычислительная машина. Грабб (Flight control and the digital computer. Grabbe Eugene M.), Control Engng, 1955, **2**, № 10, 64—68 (англ.)

Кратко описывается самолетная цифровая вычислительная машина ДИДЖИТАК (Digitac) для навигации и бомбометания (РЖМат, 1956, 796—798). Указывается, что для точного отсчета разности времени применяется устройство, использующее принцип «нониуса». Импульсы основной временной шкалы генерируются непрерывно на частоте 2 *Мгц*. Импульсы вспомогательной временной шкалы начинают генерироваться схемой со звенящим контуром при появлении импульса от наземной станции. Частоты относятся как 31 : 32. При этом обеспечивается точность отсчета $\pm 0{,}008$ *мксек*.

А. И. Щуров

6916. Быстродействующие вычислительные машины применяются при сверхзвуковых испытаниях (High-speed computer installed for supersonic testing), West. Metals, 1955, **13**, № 6, 76 (англ.)

Сообщение об установке на полигоне «Моффитт» (Moffett) в Калифорнии быстродействующей вычислительной машины «Дататрон» (Datatron) фирмы «Электродэйта» (Elektrodata Corp.) (РЖМат, 1956, 2500). Машина обрабатывает данные, полученные при продувке на сверхзвуковых скоростях моделей крыльев, фюзеляжей, элементов управления и т. д., и вычисляет подъемную силу, лобовое сопротивление, скольжение, продольную и поперечную устойчивости. Машина будет выполнять в 1 сек. до 500 сложений и вычитаний, 120 умножений и 85 делений.

А. И. Щуров

6917. К электронной конторе. Тенденции на выставке коммерческой деятельности (Towards the electronic office. Trends at the business efficiency exhibition), Times Rev. Ind., 1955, **9**, № 102, 41—42 (англ.)

Отчет о годовой выставке коммерческой деятельности в Олимпии, Англия.

Наиболее интересным экспонатом автор считает программно управляемую вычислительную машину (Programme Controlled Computer) фирмы «Паурс-Сеймас». Машина считывает информацию с перфокарт и обрабатывает ее в соответствии с программой, введенной в машину с четырех специальных карт; контролирует свои вычисления и пробивает результат на перфокартах. В машине могут накапливаться и выводиться на перфокарту результаты ряда вычислений. Имеется ряд встроенных подпрограмм. Стоимость машины около 13 тыс. фунтов стерлингов. Фирма демонстрировала также электронный множительный перфоратор (EMP — Electronic Multiplying Punch) (РЖМат, 1955, 3451).

Компания «Бритиш Тэбьюлейтинг» демонстрировала электронную цифровую вычислительную машину ГЕК (РЖМат, 1955, 2449, 3451), фирма «Голлерит» — машину 550 (Hollerith 550 Electronic Calculator).

Британское отделение фирмы «ИБМ» демонстрировало группу счетных машин, в которой бухгалтерская машина (Dual-Feed Accounting Machine) совместно работает с электронной вычислительной машиной, что представляет собой первый образец, полностью автоматизирующий обработку данных. Этой же фирмой представлена вычислительная машина, модель 626, в которой соединяется быстродействующее электронное вычислительное устройство с механическим запоминанием.

Фирмы «Паурс-Сеймас» и «Бритиш Тэбьюлейтинг» демонстрировали устройства для перенесения информации с перфоленты на перфокарты; что облегчает связь местных контор с центральными.

Из двух экспонатов привлекает внимание небольшая машина «Деск-Факс» (Desk-Fax) фирмы «Крид энд Ко» (Creed and Co.) для приемки и передачи факсимиле (12 листов 35 × 21 *см* за 2,5 часа). На выставке был представлен ряд рекламных объявлений о ведущихся разработках. «Нейшнл Каш Реджистер» описала новую бухгалтерскую машину общего назначения (General-Purpose Bookkeeping Machine, Mod. 158); «Берроуз»— суммирующую машину типа 600, фирма «Р. У. Ф.» (R. U. F.)— бухгалтерское устройство печати (Hermes Intromat Bookkeeping Typewriter).

В. Д. Князев

6918. Электронная вычислительная машина с магнитным барабаном ИБМ-650. Соваж (Le calculateur électronique IBM type 650 à tambour magnétique. Sauvage A.), Ingrs et techniciens, 1955, № 81, 3, 5, 7, 9, 11 (франц.)

Приводятся технические данные электронной цифровой машины ИБМ-650 (РЖМат, 1954, 4618; 1955, 2441).

А. А. Крупский

6919. Вычислительные машины для авиационных исследований и разработок (Computers for aviation research and development), Aviat. Age, 1955, **23**, № 6, 266—271 (англ.)

Приведена сводная таблица характеристик 43 цифровых вычислительных машин и 13 моделирующих устройств, пригодных для проведения расчетов при авиационных исследованиях и разработках. В таблице приведены фирмы-изготовители, наименования машин, характер работы (механические, электромеханические, электронные), продажная цена или арендная плата, занимаемая площадь, скорость работы, тип и объем запоминающего устройства; входные и выходные устройства, система счисления, количество разрядов, диапазон чисел, кто производит профилактический уход за машиной, срок доставки потребителю. Кроме американских вычислительных машин, даны также характеристики некоторых английских, шведских и швейцарской машин.

В. Д. Князев

6920. Автоматическое программирование. Система компилятор А2. Ч. 1,2 (Automatic programming: The A2 compiler system. Part 1,2), Computers and Automat., 1955, **4**, № 9, 25—29; № 10, 15—27 (англ.)

Статья представляет собой частичную перепечатку из руководства по технике автоматического програм-

мирования, разработанной исследовательской группой по программированию отделения «Еккерт-Мочли» фирмы «Ремингтон Ранд», известной под названием «система компилятор А2» и представляющей дальнейшее усовершенствование разработанной ранее системы А 1 для машины УНИВАК. Эта система имеет целью облегчение подготовки программ для решения математических задач и делает возможным решение на машине многих задач, решение которых раньше считалось неэкономичным с точки зрения времени или стоимости.

Порядок решения задачи при использовании системы компилятора А2 следующий. Первой стадией, как и при обычном программировании, является разбивка задачи на последовательность элементарных вычислительных этапов.

Второй этап производится с помощью руководства, в котором описан метод написания псевдокоманд. (В статье приведен полный список псевдокоманд, состоящий в основном из псевдокоманд для ввода, вывода и передачи данных; для выполнения арифметических действий и вычисления элементарных функций; для задания логических условий и облегчения программирования циклов; для подготовки результатов к печати). Когда все псевдокоманды подготовлены в правильной последовательности, они записываются на магнитную ленту. Затем устанавливается для ввода магнитная лента с задачей, записанной в псевдокомандах, лента с компилятором, лента с библиотекой, четыре чистые ленты, и начинается процесс компиляции, заключающийся в том, что компилятор при получении псевдокоманды отыскивает в библиотеке соответствующую программу, считывает ее во внутреннее запоминающее устройство и затем обрабатывает ее для соединения со всеми другими программами, выбранными из библиотеки компилятором. После того, как все программы собраны и связаны так, как это определяется псевдокомандами, они записываются на магнитную ленту. После этого можно производить вычисление по готовой программе.

Система компилятор А2 состоит из 4 основных элементов: 1) подпрограмм, под ними понимается совокупность машинных команд, необходимых для выполнения математической или логической операции (синус, четыре арифметических действия и т. д.), 2) библиотеки, являющейся упорядоченной совокупностью стандартных и проверенных подпрограмм, записанных на магнитной ленте в алфавитном порядке, 3) псевдокода, специального кода, в котором первоначально кодируется задача и который должен быть переведен в машинный код, 4) компилятора — управляющей программы, которая переводит псевдокод в машинный код. Компилятор А2 может вырабатывать программу для чисел, представленных по системе с учетом порядков (мантисса и порядок помещаются в две последовательные ячейки).

Во время решения по скомпилированной программе используется жесткая разметка запоминающегося устройства. Для всех констант и промежуточных результатов, требующихся при решении задачи, отводится один блок запоминающего устройства (60 ячеек), называемый рабочим накопителем. Два блока отводятся для хранения вводимых данных, по одному блоку отводится на инструкции управления и результаты вычислений, два блока — на подпрограммы арифметических действий по системе с учетом порядков, 2/3 блока — на наиболее часто встречающиеся константы. Для скомпилированных программ отводится 9 блоков. Ввод данных и передача их в рабочий накопитель по мере необходимости задается специальной псевдокомандой ввода.

На конкретном примере поясняется методика записи задачи в псевдокомандах. В конце статьи приведено размещение материала на магнитной ленте. Отмечается, что при применении компилятора значительно увеличивается время решения задачи. Упоминается, что программа возведения некоторой величины в целую степень состоит из 152 машинных команд. [В. И. Смирнов

6921. **Использование общих программ для кристаллографических вычислений на электронной цифровой вычислительной машине Манчестерского университета (Марк II).** Фаувеатер (The use of general programmes for crystallographic calculations on the Manchester University electronic digital computer (Mark II). Fowweather F.), Acta Crystallogr., 1955, 8, № 10, 633—637 (англ.)

Сначала программы для уточнения структуры кристаллов составлялись для отдельных пространственных групп симметрии и составление новой программы вместе с ее проверкой занимало бо́льшую часть времени, вообще затрачиваемого на задачу. В рассматриваемой статье описывается общая программа, которая без модификаций может быть применена и для синтеза Фурье и синтеза Паттерсона, для центросимметричных и нецентросимметричных пространственных групп. Та же самая программа может быть также применена для суммирования рядов Фурье. Описывается также общая программа для расчета структурных факторов для частной зоны. Программы составлены для Манчестерской машины.

В программе двумерного синтеза Фурье или Паттерсона контроль осуществляется лишь при вычислении предварительной таблицы двойным пересчетом. Указывается, что другие ошибки легко обнаруживаются при исследовании окончательной таблицы и неверные строки могут быть пересчитаны. Приводятся примеры расчетов для двух структур. В одной из них на счет 1089 точек и печать окончательной таблицы затрачивается 36 мин., в другой — на 561 точку затрачено 22 мин.

В программе вычисления структурных факторов принято вычисление каждого отражения в отдельности. Отмечается, что программа в этом случае получается проще, чем в методе, учитывающем вклад каждого атома во все отражения, потеря же во времени получается незначительной, так как на каждое отражение требуется всего 1 сек.

Приводятся результаты проведенных расчетов для нескольких структур. Например, в одной из них рассчитывались структурные факторы для зоны $h0l$. В ячейку входило 9 атомов трех различных типов. Ввод индексов, факторов рассеяния и вычисление структурного фактора занимает 1,9 сек. на отражение. Печать h, k, F занимает 2,4 сек. На перфорацию и ввод ленты для 140 отражений потребовалось 20 мин., так что полное время для зоны со 140 отражениями составляет 30 мин. Н. П. Трифонов

6922. **Кристаллографические вычисления на электронной цифровой вычислительной машине Манчестерского университета (Марк II).** Ахмед, Крукшанк (Crystallographic calculations on the Manchester University electronic digital computer (Mark II). Ahmed F. R., Cruickshank D. W. J.), Acta Crystallogr., 1953, 6, № 10, 765—769 (англ.)

Рассматривается применение электронной вычислительной машины Манчестерского университета (Марк II) для решения задачи по уточнению структуры кристаллов методом дифференциального синтеза, предложенного Бутом в 1946 г. Описывается структура программы для трехмерного цикла уточнения. В этот цикл входят: вычисления структурных факторов, проведение дифференциального синтеза с вычисленными (F_c) и экспериментальными (F_o) структурными факторами и установление ошибок. Дается сравнение времени,

затрачиваемого на выполнение дифференциального синтеза на электронной машине и на комплекте счетно-аналитических машин. Подготовка данных к вводу в обоих случаях занимает приблизительно 5 час. Оба дифференциальных синтеза (с F_0 и F_c) для антрацена на электронной машине выполнялись за 73 мин., на счетно-аналитических машинах это требовало 63 часа и 5 час. ручного труда для решения уравнений относительно поправок. Таким образом, соотношение машинного времени получается 50 : 1. Авторы указывают, что составление программы заняло 3,5 недели с последующими 4,5 неделями работы по исключению ошибок. В этот период потребовалось около 18 час. машинного времени для отладки программы. Библ. 9 назв. Н. П. Трифонов

6923. Общая программа для анализа статических напряжений на вычислительной машине. Денк, Болдт (A general digital computer program for static stress analysis. Denke P. H., Boldt I. V.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 72—78 (англ.)

Рассматриваются математическая формулировка и общая программа для решения инженерных задач анализа напряжений и деформаций в аэродинамических конструкциях. Решение задач анализа статических напряжений включает следующие этапы: 1) вычисляются геометрические постоянные (направляющие косинусы, плечи приложенных сил и т. д.); 2) пишутся уравнения равновесия сил; 3) пишутся уравнения непрерывности.

Отмечается, что каждая вычислительная машина по-своему может быть приспособлена для производства операций над матрицами. На ИБМ-701 можно производить операции над квадратными матрицами порядка не более 30. С использованием магнитной ленты порядок повышается до 300. Наличие в матрицах нулевых элементов уменьшает время на вычисление, если производить операции только над ненулевыми элементами. А. А. Красилов

6924. Примеры применения цифровых вычислительных машин ИБМ в промышленности. Лиггетт (Examples of engineering applications on IBM digital computers. Liggett I. C.), Electr. Engng, 1955, **74**, № 3, 233—235 (англ.)

Приводятся три задачи, решенные Научной вычислительной лабораторией фирмы ИБМ. Первая задача состояла в решении системы пяти алгебраических уравнений с пятью неизвестными. Задача решалась на машине CPC (Card Programmed Calculater) по методу Гаусса—Зейделя. Для разных значений коэффициентов были получены 165 решений этой задачи за 8 час. машинного времени. На программирование и кодирование задачи было затрачено 2 дня. Второй была задача о распределении потенциала по поперечному сечению в газопроводе. Для построения равнопотенциальных линий вычислялся потенциал в 800 точках поперечного сечения при помощи приближенных разностных уравнений. Задача решалась на машине ИБМ-650; на ее решение затрачено около 5 час. Третьей была задача о крутильных колебаниях многомассных систем. На программирование, кодирование и наладку машины CPC для решения такой задачи затрачено 4 часа, время решения такой задачи составляло полтора часа. В. И. Мараховский

6925. Исключение времени ожидания в автоматических вычислительных машинах с запоминающим устройством на линиях задержки. Фридман (Elimination of waiting time in automatic computers with delay-type stores. Freedman A. L.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, № 3, 426—438 (англ.)

Анализируются различные как технические, так и программные методы сокращения времени ожидания в одноадресных вычислительных машинах с запоминающим устройством на линиях задержки. Дается таблица процентного отношения времени ожидания к общему времени работы для трех типов машин. Описывается принцип *B*-устройства машины Манчестерского университета, применение которого значительно уменьшает время ожидания. *B*-устройство состоит из 8 однокодовых линий задержки, обращение к которым не требует времени ожидания, и применяется для модификации команд. Указание в коде команд определенного номера *B*-линии влечет за собой выполнение такой команды, которая получится при сложении содержания *B*-линии с выполняемой командой. Ячейки *B*-линии могут быть использованы также при вычислениях.

В машинах, у которых в одной ячейке запоминающего устройства укладывается две команды, попарное извлечение их позволяет экономить до 25% времени ожидания. Метод «двойного ожидания», позволяющий экономить время ожидания до 40%, состоит в последовательном выборе команды и компоненты операции. Метод расстановки команд характеризуется тем, что номера последовательно выполняемых команд выбираются с таким расчетом, чтобы ко времени окончания работы предыдущей команды следующая за ней могла бы быть выбрана без ожидания. Этот метод экономит около 50% времени ожидания. Выбор такой последовательности рабочих ячеек, чтобы последовательное обращение к ним исключало время ожидания, дает экономию 40% времени.

Одновременная расстановка команд и рабочих ячеек экономит 65% времени ожидания. Этот метод использован в машине АКЕ и назван оптимальным программированием или методом «расстановки кодов».

Анализируется значение буферного запоминающего устройства, которое служит для хранения нескольких последовательно выполняемых команд и является посредником между главным запоминающим устройством и арифметическим устройством. Обращение к нему не требует времени ожидания, а число хранимых в нем команд подбирается так, чтобы общее время их работы равнялось одному циклу регенерации в линии задержки. При этом экономится 50% времени ожидания.

Ускоренное запоминающее устройство, ячейки которого используются в качестве рабочих, позволяет экономить до 75% времени ожидания. Для его выполнения достаточно 4 однокодовых регистров. Комбинация ускоренного и буферного запоминающего устройства дает экономию около 85% времени ожидания, а объединение расстановки кодов с ускоренным запоминающим устройством сокращает время ожидания на 92%. Эти цифры приблизительны и основаны на анализе работы машины ЭДСАК. Сообщается, что в машине ИРА-1101 применен метод расстановки рабочих ячеек в сочетании с ограниченным методом расстановки команд. Л. Н. Королев

6926. Моделирующее устройство «Джинн» («Djinn» electronic analogue computer), Interavia Air Letter, 1955, № 3269, 9 (англ.)

Сообщается, что в лаборатории Derveaux (Франция) разработано моделирующее устройство для решения систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Устройство предназначено для решения авиационных задач: вычисления статической и динамической устойчивости, исследования установок дистанционного управления, анализа баллистических траекторий и др.

Конструктивной особенностью установки является съемное наборное поле. П. В. Тихонов

6927. Электрическая вычислительная машина для расчетов, связанных с определением структуры кри-

сталлов. Монтес Вильялон, Аббад (Maquina electrica para efectuar algunos calculos que intervienen en la determinacion de estructuras cristalinas. Montes Villalón J., Abbad M.), An. Real. soc. española fis. y quim., 1953, **49A**, №5—6, 173—180 (исп.; рез. англ.)

Машина построена в институте «Алонзо де санта Круз» (Instituto «Alonso de Santa Cruz») для вычисления членов вида

$$n \cdot f \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} 2\pi (h_1x_1 + k_1y_1 + l_1z_1) \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} 2\pi (h_2x_2 + k_2y_2 + l_2z_2) \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} 2\pi (h_3x_3 + k_3y_3 + l_3z_3).$$

Подобного рода выражения встречаются при рентгеноструктурном анализе для определения электронной плотности в кристаллах исследуемых веществ. В основу принципа действия машины положена схема моста Уитстона, плечи которого пропорциональны sin или cos, входящим в уравнение. Н. В. Корольков

6928. **Прибор для решения систем алгебраических уравнений. Доморяд А. П.,** Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 54, 29—34

Описывается идея гидравлической модели для определения значений многочлена от двух переменных одновременно во всех узлах некоторой ограниченной прямоугольной решетки. Определив для двух многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ совокупности узлов $x_r y_s$, где их значения ближе всего к нулевым, можно принять общие узлы этих совокупностей в качестве приближенных решений системы $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$.

Идея автора состоит в создании комплекта сообщающихся цилиндров с основаниями $x_r^i y_s^k$ (для x_r и y_s соответствующих различным узлам решетки). Наливая в них воду до уровня a_{ik}, можно получить в каждом цилиндре объем воды, равный $a_{ik}x^iy^k$; сливая вместе воду из цилиндров, соответствующих одной и той же паре x_r и y_s, получим объем $V = \Sigma a_{ik}x_r^iy_s^k = P(x, y)$.

Ю. А. Шрейдер

Примечание редакции. Необходимость практического осуществления подобной модели вызывает сомнение ввиду ее громоздкости.

6929. **Австралийское моделирующее устройство для управляемых снарядов** (Australian guided weapons analogue computor), Radiotronics, 1954, **19**, № 12, 135—136 (англ.)

Кратко описывается моделирующее устройство АГВАК (РЖМат, 1955, 6125). Кроме линейных решающих элементов, устройство имеет нелинейные блоки с диодными элементами для аппроксимирования нелинейных зависимостей и электромеханические решающие элементы для воспроизведения тригонометрических функций и умножения медленно изменяющихся параметров. Устройство имеет также вспомогательную моделирующую установку для решения двух дифференциальных уравнений второго порядка. П. В. Тихонов

6930. **Моделирующие устройства для обработки данных с беспорядочными колебаниями. Смит** (Analog equipment for processing randomly fluctuating data. Smith Francis B.), Aeronaut. Engng Rev., 1955, **14**, № 5, 113—119 (англ.)

См. РЖМат, 1956, 809.

6931. **Вычисление полиномов и их корней с помощью моделирующих устройств. Шерберг, Риорден** (Analogue calculation of polynomials and their zeros. Scherberg M. G., Riorden J. F.), Proc. of the Association for Computing Machinery, Washington D. C. Sauls Lithograph Co., 1953, 118—120 (англ.)

Описывается новый метод вычисления полиномов и их корней, пригодный как для моделирующих устройств, так и для цифровых машин. Его применение иллюстрируется для моделирующих машин. См. РЖМат, 1954, 2385. Ф. В. Майоров

6932. **Вычисления на моделирующих устройствах. Фуди** (Analogue computation. Its place in aircraft design. Foody J. J.), Flight, 1955, 68, № 2427, 168—170 (англ.)

Обосновывается полезность применения моделирующих устройств при проектировании и конструировании самолетов. Перечисляются задачи, решаемые при этом на моделирующих устройствах.

Сообщается, что фирма «Эйркрафт» использует для этой цели три универсальных моделирующих устройства. Г. К. Кузьминок

6933. **Подражание при моделировании. Эрвин, Дейвис** (Simulation by modeling. Irvine N. L., Davis L.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 13—16 (англ.)

Разбирается вопрос о моделировании преобразования Фурье функций от двух переменных при наличии частотной фильтрации. Н. А. Бразма

6934. **Исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений методами электроники. Николау** (Un nou sistem diferențial neliniar studiat pe cale electronică. Nicolau Edmond), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat şi fiz., 1955, **7**, № 2, 465—475 (рум.; рез. русс., франц.)

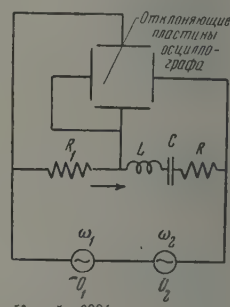
Показан способ исследования системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = L\frac{d^2y}{dt^2} + R\frac{dy}{dt} + \frac{1}{C}y,$$

$$\frac{dy}{dt} = Nx - NRy - Mf$$

при помощи простого электронного прибора (см. рис.) В уравнениях: R, L, C и x — положительные, N может принимать положительное, нулевое или отрицательное значение, M — конечное или бесконечно малое, f — функция, вводящая нелинейность. Причем

$f = f(x^*, y^*, a, X_1, X_2, R)$, где $x^* = X_1 \cos \omega_1 t + R(\sin \omega_1 t + a \sin \omega_2 t + \varphi) + X_2(\cos \omega_2 t + \varphi)$, $y^* = \sin \omega_1 t + a \sin(\omega_2 t + \varphi)$, $X_i = \omega_i L - (1/\omega_i C)$ $(i = 1, 2)$.



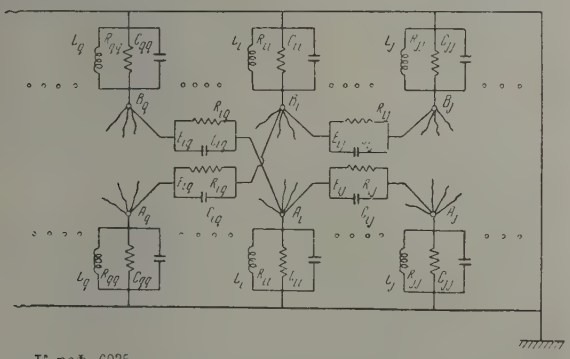
К реф. 6934

Предложенный метод дает возможность видеть на экране катодолучевого осциллографа решение системы как при слабой, так и при сильной нелинейности. Решения задачи на фазовой плоскости обобщают кривые Лиссажу, циклоиды и эпициклоиды. Полученные результаты имеют и практический интерес, так как могут быть использованы при сравнении частот. В конце статьи приводятся осциллограммы решений системы при различных соотношениях частот ω_1 и ω_2, различных по величине и знаку X_1 и X_2, различных начальных условиях и т. п. Г. К. Кузьминок

6935. **Электрическое моделирование колебаний и устойчивости стержневых систем. Бондарь** (Електричне моделювання коливань та стійкості стержневих систем. Бондар М. Г.), Доповіді АН УРСР, 1953, № 5, 375—382 (укр.; рез. русс.)

Сначала рассматривается физическое моделирование вынужденных колебаний стержневых систем с конечным

числом степеней свободы. Стержневая система с массой, сосредоточенной в n точках, моделируется на основе первого закона Кирхгофа электрической сеткой из $2n$ одинаковых *RLC*-двухполюсников, у которых закорочено по одному полюсу, а другие полюсы соединены между собой *RC*-двухполюсниками (см. рис.). В незакороченные полюсы *RLC*-двухполюсников подаются токи, изображающие статические перемещения в стержневой системе, вызванные внешней переменной силой. Искомые переменные: динамические перемещения, скорости и ускорения масс стержневой системы — пропорциональны токам в *RLC*-двухполюсниках. При моделировании нестационарных колебаний стержневых систем наличие в начальный момент времени надлежащих токов в самоиндукциях и сопротивлениях *RLC*-двухполюсников обеспечивается переключением сетки с питания постоянным током, изображающим начальные условия, на переменный ток, изображающий нестационарные колебания при этих начальных условиях. Приводятся критерии подобия, и излагается методика подбора параметров электрической модели.



К реф. 6935

Затем рассматривается электрическое моделирование статической устойчивости стержневых систем. Ввиду аналогии, установленной Я. Л. Нудельманом (Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем, Гостехиздат, 1949), задача определения критических нагрузок на стержневую систему сводится к задаче определения частот свободных колебаний стержневой системы, а эта задача легко решается путем пересчета частотных характеристик модели, снятых с помощью генератора звуковой частоты. Описан порядок решения задач статической устойчивости стержневых систем на таких моделях. В заключение указывается, что эффективность метода электрического моделирования колебаний и устойчивости стержневых систем проявляется тем больше, чем сложнее стержневая система. Г. П. Поваров

6936. **Изучение обратного зажигания дуги в выпрямителе на моделирующем устройстве. Диллард, Болдуин** (Rectifier arc-back study on the analogue computer. Dillard J. K., Baldwin C. J., Jr), Commun. and Electronics, 1954, № 13, 198—208 (англ.)

Рассматриваются методы определения токов обратного зажигания дуги в выпрямителе. Ввиду сложности аналитического расчета и малой точности существующих методов приближенного расчета, авторы изучили данный вопрос методом моделирования процесса на моделирующем устройстве. Приводится окончательная схема, на которой имитировалась обратная дуга, и осциллограммы токов обратной дуги.

По полученным данным построены эмпирические кривые, показывающие зависимость между постоянными цепи и первой волной тока обратной дуги. Изложена методика определения анодного и катодного токов и скорости их нарастания по приведенным графикам. П. В. Тихонов

6937. **Применение моделирующих устройств для исследования колебаний в электрических системах. Шэнь, Паккер** (Analysis of hunting phenomena in power systems by means of electrical analogues. Shen D. W. C., Packer J. S.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1954, **101**, № 79, part 2, 21—34 (англ.)

Приводится описание методики применения моделирующего устройства для исследования колебаний в электрических системах. Вычислительное устройство работает с частотой 10 *кгц*. Дифференциальное уравнение движения синхронных машин при исследовании малых колебаний может быть линеаризировано. В этом случае оно приобретает вид, сходный с уравнением электрической цепи переменного тока. На этой основе строится принцип моделирования. В комплект устройства входят фазосдвигающие устройства, модуляторы, усилители и интегрирующие элементы. Номинальный ток устройства 0,1 *а* при напряжении 12,56 *в*.

А. А. Крюков

6938. **Применения электронных моделирующих устройств. Сикала** (Applications of an electronic analogue computer. Cicala Plácido. Univ. Nac. Eva Peron. Publ. Fac. Ci. Fisicomat Ser. Publ. Especiales, 1954, **41**, № 202, 10 pp., ill.) (исп.)

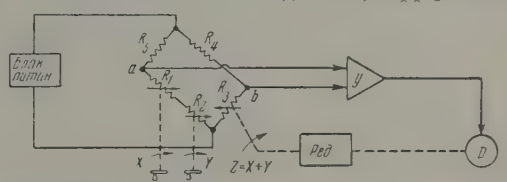
Перевод из Math. Revs. 1955, **16**, № 5, 527

6939. **Следящие системы для выполнения математических операций. Уолл** (Servo systems for performing mathematical operations. Wall Ernest), Prod. Engng, 1953, **24**, № 9, 134—140 (англ.)

Описываются способы выполнения различных математических операций с помощью следящих систем.

Сложение или вычитание может быть выполнено при помощи механических дифференциалов, следящих систем, сельсинных передач и самобалансирующихся мостовых схем. Когда для сложения используется следящая система, входные суммируемые величины X и Y задаются установкой движков потенциометров. Напряжение, пропорциональное сумме (или разности) входных величин, подается на усилитель, который управляет серводвигателем. Результат сложения (или вычитания) представляется в виде поворота на определенный угол выходного вала серводвигателя. Двигатель через редуктор поворачивает движок потенциометра обратной связи до тех пор, пока сигнал обратной связи Z, подаваемый в усилитель, не станет равен сумме входных сигналов $X + Y$.

Сельсинная система для выполнения сложения или вычитания состоит из сельсина-датчика, дифференциального сельсина, сельсина-приемника в трансформаторном режиме, усилителя и серводвигателя, поворачивающего ротор сельсина-приемника до тех пор, пока его угол отклонения не будет равен сумме или разности углов отклонения роторов сельсина-датчика и дифференциального сельсина.



К реф. 6939

Мостовая схема, балансирование которой осуществляется при помощи следящей системы, может применяться для сложения, вычитания, умножения и деления (см. рис.).

При умножении с помощью следящей системы сомножители X и Y задаются установкой движков последовательно соединенных потенциометров, а сигнал, пропорциональный произведению XY, сравнивается с сигналом обратной связи Z. Когда $Z = XY$, угол поворота выходного вала следящей системы пропорционален произведению XY. Применение сельсинной следящей системы в сочетании с механическим множительным устройством шарико-дискового типа позволяет уменьшить нагрузку на выходном валу устройства и повысить точность умножения.

Возвышение в степень и извлечение корня может быть выполнено при помощи последовательно соединенных потенциометров и следящей системы. Число потенциометров определяется степенью, в которую возводится входная величина, или степенью извлекаемого из нее корня.

Следящие системы находят применение и при решении треугольника. Для определения катета Z прямоугольного треугольника по гипотенузе X и другому катету Y при помощи мостовой вычислительной схемы решается равенство $X^2 - Y^2 = Z^2$. Регулировкой сопротивлений двух плеч моста задается разность квадратов гипотенузы и катета, а квадрат искомого катета определяется углом поворота выходного вала следящей системы, которая балансирует мост установкой движков потенциометров двух других плеч. При определении гипотенузы прямоугольного треугольника по двум катетам потенциометрический вычислитель и следящая система решают равенство $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Для решения треугольников используются также и электромеханические следящие устройства, в которых вращающийся трансформатор связан со следящей системой. В таких устройствах прямоугольные координаты преобразуются в полярные, и векторные величины определяются по их синусоидальным и косинусоидальным составляющим.

Интегрирование может быть выполнено механическим интегратором и следящей системой. При использовании следящей системы напряжение, пропорциональное интегрируемой величине, сравнивается в суммирующем усилителе с напряжением тахогенератора, приводимого во вращение серводвигателем. Когда эти напряжения оказываются равными, угол поворота выходного вала следящей системы и определяет искомый интеграл.

Ю. И. Кириленко

6940. Вычислительная машина для моделирования в области домостроения (House analog), Electronics, 1955, 28, № 8, 206 (англ.)

Сообщение о намерении фирмы «Миннеаполис-Хонейвелл Регулятор» (Minneapolis-Honeywell Regulator Co.) использовать моделирующее устройство для расчета теплового баланса зданий, определения изменения тепловой изоляции во времени и т. д. Имеется возможность моделирования жилища любого типа для испытаний строительных материалов и обогревного оборудования.

А. Б. Залкинд

6941. Пятиканальный диодный электронный генератор функций (Five-channel diode electronic function generator), Rev. Scient. Instrum., 1955, 26, № 4, 405 (англ.)

Сообщение фирмы «Ривс Инструмент» (Reeves Instrument Corp.) о выпуске генератора DEFG-201 Mod 1 для генерирования разнообразных функций. Функция аппроксимируется 40 линейными отрезками, которые располагаются в четырех квадрантах. Существенной чертой устройства является возможность использования его для генерирования функций двух переменных.

А. В. Авдеев

6942. Запускающий генератор для моделирующих устройств (Analog stimulus generator), Mach. Design, 1953, 25, № 11, 243—244 (англ.)

Сообщение фирмы «Филбрик» о выпуске генератора типа «CS». Генератор используется в высокоскоростных моделирующих устройствах с периодизацией решения в качестве устройства, определяющего начало решений. Генератор обеспечивает получение интервалов решения длительностью в 40 *мсек*. В качестве питающих напряжений используются постоянные напряжения ± 300 *в* с потреблением по 60 *ма* и переменное напряжение 115 *в* с потреблением 0,7 *а*.

Б. Ш. Беркович

6943. Устройство для записи выходных напряжений электронных моделирующих установок и ввода различных функциональных зависимостей (Input-output recorder-generator), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 11, 1074—1075 (англ.)

Сообщение фирмы «Гудиир» (Goodyear Aircraft Corp.) об устройстве типа TLGEDA для записи и воспроизведения непрерывно изменяющихся напряжений (РЖМат, 1954, 3882), разработанном в качестве дополнения к универсальным электронным моделирующим установкам, выпускаемым указанной фирмой.

Прибор питается от сети переменного тока 105—125 *в* и потребляет 200 *вт*.

Б. Я. Коган

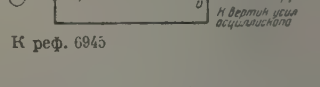
6944. Опыт эксплуатации моделирующих устройств. Стронг (A practical approach to analog computers. Strong John D.), Instrum. and Automat., 1955, 28, № 4, 602—610 (англ.)

Статья представляет собой руководство для инженеров-практиков, желающих обучиться работать на моделирующих вычислительных устройствах. В качестве типичного образца взята модель 16—31 R фирмы «Электроник Ассошиэйтс» (Electronic Associates Inc.). Кратко описаны основные блоки устройства (усилители, сумматоры, умножители, интеграторы, выходное устройство и т. д.) и приведены их основные характеристики. Дается методика решения на этом устройстве ряда простейших задач: вычисление полиномов, изучение траектории свободно падающего тела, изучение движения тела под действием упругих сил.

Г. К. Кузьминок

6945. Измерение нелинейности. Прессе (Measuring non-linearity. Pressey D. C.), Wireless World, 1954, 60, № 2, 60—62 (англ.)

Описывается простой метод измерения нелинейности усилителей постоянного тока, применяемых в счетно-решающих усилителях, обладающих нелинейностью порядка 1% и менее. Этот метод применим также к усилителям низкой частоты и усилителям осциллографов и дает точные результаты при условии отсутствия сдвига фаз на частоте измерений. Принцип действия (см. рис.) состоит в том, что на один вход суммирующего усилителя подается напряжение V от генератора непосредственно, на другой вход — то же напряжение, но через аттенюатор и исследуемый усилитель.



К реф. 6945

Если коэффициент усиления усилителя равен A, то ослабление, вносимое аттенюатором, должно быть равно $1/A$. На выходе усилителя получается сигнал ошибки V_e. Нелинейность усилителя равна $N = (V_e/AV_i) \times 100\%$.

В. В.

6946. Диодный импульсный интегратор. Эрншоу (The diode pump integrator. Earnshaw J. B.), Electronic Engng, 1956, 28, № 335, 26—30 (англ.)

Дано подробное описание принципа работы диодно-емкостной схемы, предназначенной для получения среднего значения напряжения от последовательности пря-

моугольных импульсов постоянной амплитуды и длительности. Приводится вывод точных и приближенных расчетных формул. Указаны условия работы схемы как в качестве линейных (измеритель частоты, демодулятор частотно-модулированных колебаний), так и в качестве нелинейных (делитель частоты) устройств, описанных ранее в литературе, указываемой автором.

В качестве нового применения нелинейных свойств этой схемы описано устройство, чувствительное к изменениям частоты. Даны расчетные формулы для определения параметров этой схемы из соображений наибольшей ее чувствительности к колебаниям частоты. Приводится практическая схема такого устройства, чувствительного к менее чем 1%-ному изменению частоты при основной частоте, равной 500 *гц*.

Б. И. Стрелков

6947. **Миниатюрная муфта для управляемых снарядов** (Miniature slip clutch for guided missiles), Aviat. Week, 1954, **61**, № 26, 65 (англ.)

Сообщение фирмы «Редиал Метал Продуктс» (Radial Metal Products, Inc.) о миниатюрных фрикционных муфтах с диаметрами от 3 до 56 *мм*. Муфты применяются в компактных электромеханических и других устройствах, где требуется постоянный момент или ограничение при перегрузках. Точность и небольшие размеры муфт обусловлены применением силиконового порошка и рядом конструктивных особенностей. В. М. Тарасевич

6948. **Сезонные вычисления на машине УНИВАК. Шишкин** (Seasonal computations on Univac. Shiskin Julius), Amer. Statistician, 1955, **9**, № 1, 19—23 (англ.)

Бюро переписи (Bureau of the Census) США проводит на машине УНИВАК исследование сезонных колебаний и общих тенденций в экономике страны. Расчеты включают большое число однотипных операций при малом количестве входных данных и большом — выходных. Считается, что для такого режима работы УНИВАК хорошо приспособлен. Приведены таблицы, определяющие сезонные колебания числа безработных.

В. Д. Князев

6949. **Вычислительный центр** (The computer center), Res. Engr, 1955, **10**, № 3, 9 (англ.)

Сообщается о создании фирмой «Рич Фундейшн» (Rich Foundation of Atlanta) вычислительного центра. В вычислительном центре установлены электронные вычислительные машины CRC-102D и ИРА-1101 (ERA-1101). В. П. Кузнецова

6950. **Марш автоматизации** (The march of automation), S. Afric. Ind. and Trade, 1955, **51**, № 8, 37 (англ.)

Сообщение об установке в Дании новой английской машины МИРАКЛЕ фирмы «Ферранти» (Ferranti Ltd) (РЖМат, 1956, 2501). А. И. Щуров

6951. **Вычислительный центр для железных дорог. Стафлбим** (Computer centers for railroads. Stufflebeam George T.), Mod. Railroads, 1955, **10**, № 2, 81—82 (англ.)

Сообщается, что в настоящее время в Нью-Йорке работает вычислительный центр, обслуживающий нужды железных дорог. В ближайшем будущем намечена постройка вычислительных центров в стратегических узлах железных дорог по всей стране.

На вычислительных машинах могут быть поставлены различные задачи, связанные с железнодорожными перевозками, например, вычисление годового дохода, международные расчеты, распределение вагонов, заказ пассажирских билетов, расчет заработной платы, распределение рабочей силы и материалов, статистические доклады и др. В. Д. Князев

6952. **Электронная вычислительная машина для железных дорог** (Electronic computor for the railways), Electr. Times, 1955, **127**, № 3301, 232 (англ.)

Сообщается, что в расчетном центре железной дороги Мидлендского района Лондона применяется электронный множительный перфоратор (EMP — Electronic Multiplying Punch) фирмы «Паурс-Сеймас» (Powers Samas) (РЖМат, 1955, 3451). Главной задачей центра является оформление документации и управление движением 7000 входящих и исходящих документов, содержащих до 60 000 статей. В. Д. Князев

6953. **Промышленные вычисления** (Industrial computation), Aeroplane, 1955, **88**, № 2272, 156 (англ.)

Сообщается, что фирма «Эллиотт» принимает заказы на выполнение вычислений на машине 402. В. Д. Князев

6954. **Электронная вычислительная машина. Обзор годичного опыта. Маршалл** (The electronic computer: Year's experience reviewed. Marshall A. H.). Municip. J., 1955, **63**, № 3257, 1944—1945 (англ.)

Сообщается, что с 1 апреля 1954 г. в Ковентри (Англия) работает электронная цифровая вычислительная машина, используемая совместно с комплектом счетно-аналитических машин. На машине производится вычисление недельной заработной платы и различных налогов и отчислений для 5000 человек. Машина загружается только на 60% своей мощности. В. Д. Князев

6955. **Вычислительные машины фирм АГЕ и «Локхид»** (AGE and Lockheed computers), Cornell Engr, 1955, **21**, № 2, 50, 52, 54 (англ.)

Сообщается, что фирма AGE (American Gas and Electric System) установила в своем отделении в г. Колумбии моделирующее устройство для вычислений, связанных с определением наиболее экономичных условий генерирования и передачи электроэнергии по высоковольтным линиям на расстояние 13,5 *км*. На заводе фирмы «Локхид» установлена вычислительная машина ИБМ-650 для решения проблем аэродинамики. На выпускаемых с 1955 г. машинах ИБМ-650 устанавливается магнитный барабан диаметром 100 *мм*, длиной 400 *мм* и хранящий 20 000 цифр. А. Б. Залкинд

6956. **Вычислительная машина с наборными дисками. Кул** (Dialingest computer., Kuhl R.), Iowa Engr, 1954, **54**, № 8, 13 (англ.)

Кратко описывается вычислительная машина, разработанная совместно фирмами «Дженерал Электрик» и «Америкен Газ энд Электрик Сервис» (РЖМат, 1954, 4223), служащая для определения наиболее экономически выгодного режима работы электрической системы, состоящей из большого количества станций, линий передачи и потребителей. Вычислительная машина имеет 1290 наборных дисков, с помощью которых устанавливается данный режим системы.

6957. **Электронное устройство для обработки статистических данных. Мазинг** (Ein electronisches Gerät zur Schnell-Ermittlung statistischer Kenngrössen. Masing Walter), Mitteilungsbl. Math. Statist., 1954, **6**, 233—238 (нем.)

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 527

6958. **Список организаций, работающих в области вычислительных машин. Сводный список по состоянию на 20 апреля 1955 г.** (Roster of organizations in the computer field. Cumulative, information as of April 20, 1955), Computers and Automat., 1955, **4**, № 6, 103—117 (англ.)

В список включено 295 организаций, из них 261 из США, 12 из Англии, 9 из Франции, 5 из Канады, 2 из Австралии, 2 из Швеции, 1 из Италии, 1 из Голландии, 1 из Дании, 1 из Германии.

6959. **Список организаций, работающих в области вычислительных машин. Сводный список по состоянию на 10 ноября 1955 г.** (Roster of organizations in the computer field. Cumulative, information as of November 10, 1955) , Computers and Automat., 1955, **4**, № 12, 13—28, 35 (англ.)

В список включено 336 организаций, из них 302 из США, 12 из Англии, 8 из Франции, 6 из Канады, 2 из Австралии, 2 из Швеции, 1 из Италии, 1 из Голландии, 1 из Дании, 1 из Германии.

6960. **Кто чем занят в области вычислительных машин. 2-й список, сводный, по состоянию на 20 апреля 1955 г.** (Who's who in the computer field. Second edition, cumulative, information as of April 20, 1955), Computers and Automat., 1955, 4, № 6, 6—102 (англ.)

В список включено более 7000 человек.

6961. **Кто чем занят в области вычислительных машин. Дополнительный список** (Who's who in the computer field. Appendix), Computers and Automat., 1955, 4, № 6, 148, 150 (англ.)

Дополнения и исправления к основному списку (реф. 6960). В список включено 62 человека.

6962. **Список организаций, принимающих заказы на выполнение вычислительных работ. Сводный список по состоянию на 3 ноября 1955 г.** (Automatic computing services — Roster. Cumulative information as of November 3, 1955), Computers and Automat., 1955, 4, № 12, 30—31 (англ.)

В список включено 43 организации из США, 3 из Англии, 1 из Швеции, 1 из Канады.

6963. **Книги и другие публикации. Спенсер** (Books and other publications. Spenser Gordon), Computers and Automat., 1955, 4, № 7, 26—28 (англ.)

В список включено 13 публикаций, вышедших в в 1954—1955 гг.

6964. **Книги и другие публикации. Бауи, Спенсер** (Books and other publications. Bown Jewell, Spenser Gordon), Computers and Automat., 1955, 4, № 8, 28—32 (англ.)

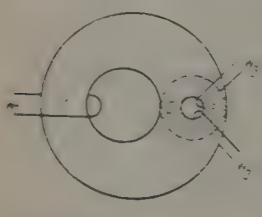
В список включено 24 публикации, вышедших в 1953—1955 гг.

6965. **Книги и другие публикации. Бауи** (Books and other publications. Bown Jewell), Computers and Automat., 1955, 4, № 9, 36 (англ.)

В список включено 5 публикаций.

6966. **Магнитный вентиль с запоминанием амплитуды управляющего сигнала. Райхман, Ло** (The transfluxor — a magnetic gate with stored variable setting. Rajchman Jan A., Lo Arthur W.), RCA Review, 1955, 16, № 2, 303—311 (англ.)

Описана новая схема магнитного вентиля, так называемого трансфлюксора (transfluxor), принцип работы которого состоит в следующем (см. рис.). Управляющая (W_1), силовая (W_3) и выходная (W_0) обмотки расположены на ферритовом сердечнике с прямоугольной петлей гистерезиса, как показано на рисунке. Если управляющий сигнал в виде одиночного импульса насыщает стержни 1, 2, 3, то переменный ток, поданный в обмотку W_3, создает незначительное напряжение на выходной обмотке W_0. Если теперь в обмотку W_1 подать управляющий импульс обратной полярности, который размагнитит стержни 1 и 2 на некоторую величину, не изменив индукции в стержне 3, то включение переменного тока в обмотку W_3 приведет к тому, что поток в стержнях 2 и 3 будет периодически изменяться и на обмотке W_0 появится переменное напряжение. Следовательно, одиночный импульс, поданный в управляющую обмотку, будет изменять эффективное поперечное сечение стержня 3, на котором лежит выходная обмотка, в некоторых пределах пропорционально амплитуде этого импульса.



К реф. 6966

Трансфлюксор таким образом является запоминающим магнитным усилителем, переменное напряжение на выходе которого управляется коротким одиночным импульсом, а входная, управляющая и силовая цепи оказываются взаимно развязанными без применения дополнительных элементов. О. В. Росницкий

6967. **Вращающаяся головка для чтения с магнитной ленты и проволоки** (A rotating reading head for magnetic tape and wire), J. Franklin Inst., 1955, 260, № 2, 134—136 (англ.)

Национальным бюро стандартов (National Bureau of Standards) разработана головка для чтения с неподвижной магнитной ленты и проволоки. Головка устанавливается на барабане диаметром 73 *мм*, вращающемся со скоростью 10 об/сек, что эквивалентно скорости носителя приблизительно 2,3 *м/сек*. Головка может быть легко снята и заменена другой, приспособленной для чтения с ленты или проволоки иных размеров. В барабане сделано отверстие, через которое на фотоэлемент падает при вращении барабана луч света. Импульс, снимаемый с фотоэлемента, может использоваться для синхронизации развертки при исследовании записи с помощью осциллографа. К внешним цепям сигнал с головки подводится через скользящие контакты.

Эта головка использовалась для выявления участков магнитной ленты или проволоки с плохой записью. Кроме того, такая головка может успешно использоваться в устройстве, переносящем информацию с перфоленты на магнитную ленту для записи и контрольного считывания. Используя эту головку, можно записывать информацию на магнитную ленту прямо с клавиатуры и тут же контролировать правильность записи. А. И. Шуров

6968. **Магнитные головки фирмы «Монробот»** (Monrobot components), Computers and Automat., 1955, 4, № 6, 155 (англ.)

Сообщение фирмы «Монробот» о выпуске магнитных головок новой конструкции. Д. А. Кузьмичев

6969. **Новый подход к запоминанию информации. Кинг** (A new approach to information storage. King Gilbert W.), Control Engng, 1955, 2, № 8, 48—53 (англ.)

Описывается одностороннее запоминающее устройство, в котором информация наносится на светочувствительную пленку с большой разрешающей способностью. Пленка имеет форму диска и вращается со скоростью 2400 об/мин. Диаметр диска равен 40 *см*. Рабочей частью диска является внешняя полоса шириной 10 *см*. На таком диске размещается до 20 млн. двоичных цифр. За 1 сек. может выбираться до 1 млн. цифр. Максимальное время выбора 25 *мсек*. Информация записывается по окружности на нескольких дорожках двоичным кодом в виде прозрачных и непрозрачных прямоугольников размером $0{,}025 \times 0{,}075$ *мм*. Плотность записи 1 млн. двоичных цифр на 1 *мм*^{2}. Для обозначения двоичной цифры используется один прозрачный и один непрозрачный прямоугольники. Нуль от единицы отличается последовательностью прямоугольников.

Считывание информации производится светящимся пятном на экране электронолучевой трубки, которое фокусируется линзой на информационные дорожки и через них падает на фотоумножитель. Выбор дорожки осуществляется отклонением электронного луча на трубке. Большой точности отклонения не требуется, так как для фиксации луча точно на дорожке применяется сервосистема. Для этой цели информационная дорожка обрамлена прозрачной и непрозрачной направляющими полосами. При попадании на них луча средний уровень сигнала сильно меняется и это из-

менение воздействует на сервосистему, управляющую отклонением луча. Пропуски между кодами отмечаются непрозрачной полосой шириной в 1/2 обычной информационной дорожки. Место кода на диске определяется адресом, который считывается с диска и передается в специальный регистр для сравнения с заданным адресом. При совпадении адресов информация подается на выход.

Для записи информации на диск служат специальные наборы из прозрачных параллелепипедов, с тыльной стороны которых помещаются лампочки, загорающиеся в соответствии с принятой информацией и экспонирующие светочувствительную эмульсию. Между собой параллелепипеды разделены непроницаемой для света алюминиевой фольгой. После записи кода диск сдвигается на необходимую величину.

При другом методе записи информация набирается принятым кодом на линотипе. Со строк делаются отливки и оттиски, которые после проверки и коррекции могут быть пересняты на диск. А. И. Щуров

6970. Двоичный счетчик с переменным масштабом. Мерреи (A variable binary scaler. Murray D. B.), IRE Trans. Electronic Comput., 1955, EC-4, № 2, 70—74 (англ.)

Рассматриваются общие принципы построения логических схем счетчиков с изменяющимся посредством коммутации пересчетным числом. Импульс для запуска последующего триггера может формироваться либо в момент перехода предыдущего триггера в состояние «0», что соответствует соединению в обычном счетчике, суммирующем входные импульсы, либо в момент перехода предыдущего триггера в состояние «1», что соответствует счетчику, показывающему разность между установленным в нем числом и числом пришедших на его вход импульсов. Коммутация импульсов осуществляется весьма просто посредством реле или каскадов совпадения, включаемых между триггерами счетчика. В свою очередь эти элементы управляются от соответствующих триггеров, которые могут быть также включены по схеме счетчика. С помощью 2^k комбинаций вспомогательных триггеров, управляющих каскадами совпадения, можно получить 2^k различных последовательностей в работе основного счетчика. Если теперь использовать определенное состояние основного счетчика для запуска схемы, устанавливающей основной счетчик в исходное состояние, то с помощью вспомогательных триггеров можно получить любые масштабы деления основного счетчика от 1 до 2^k. Число, принятое в вспомогательный счетчик, должно быть на одну единицу меньше, чем желаемый масштаб деления основного счетчика. Приводятся два метода построения логических схем счетчиков, обеспечивающих деление с округлением. Делимым является число входных импульсов, делителем — масштаб деления счетчика, частным — число импульсов на выходе.

Аналогичные схемы могут осуществлять преобразование обычного двоичного кода в рефлексный код или в двоично-пятеричный код. Рассматриваемые схемы менее сложны и требуют меньшего числа элементов, чем схемы, использующие обратные связи в счетчике с фиксированным масштабом деления.

Недостатком рассмотренных схем является сложность представления промежуточных состояний счетчика, так как они не могут быть выражены обычным двоичным кодом. А. Б. Залкинд

6971. Счетчик с предварительной установкой (Predetermined counter), Tele-Tech, 1953, 12, № 10, 110 (англ.)

Сообщение фирмы «Поттер Инструмент» (Potter Instrument Co., Inc.) о выпуске нового счетчика, сконструированного для использования там, где требуется точное многократно-последовательное определение длины, оборотов вала, количества, объема или веса со скоростью до 60 000 измерений в 1 мин. Прибор не реагирует на изменения скорости счета вплоть до выключения, что позволяет использовать его там, где иначе точный контроль невозможен. Приведена фотография четырехканального счетчика. Каждый канал может быть предварительно установлен на любой коэффициент пересчета от 0 до 9999. Переключение по четырем каналам производится автоматически в конце каждого предварительно установленного цикла счета; при этом по каждому каналу с независимого релейного выхода выдается импульс напряжения. В. К. Зейденберг

6972. Декадный счетчик (Decade scaler), Tele-Tech, 1953, 12, № 11, 110 (англ.)

Сообщение фирмы «Норт Американ Филипс» (North American Philips Co.) о новом быстродействующем шестизначном десятичном счетчике, предназначенном для использования в устройствах дальней связи и ядерных вычислительных устройствах. Счетчик собран в виде отдельного блока, имеющего выпрямитель и соответствующие схемы управления. Максимальная скорость счета 30 000 имп/сек., минимальное разрешающее время 25 *мксек.*, наибольшее регистрируемое число 999999. Питание от сети 95—130 *в*, 50—60 *гц*. Приведена фотография счетчика. В. Б.

6973. Счетчики для цифровых систем (Counters for digital systems announced), Aviat. Week, 1953, 59, № 19, 71—72 (англ.)

Сообщение о приборах, используемых в автоматике и в вычислительных машинах.

Блок запоминающего устройства на кварцевой линии задержки (РЖМат, 1954, 3890).

Двоичный счетчик типа 1001 фирмы «Лаборатори фор Электроникс» (Laboratory for Electronics) (РЖМат, 1954, 5320).

Два типа счетных ламп с холодным катодом фирмы «Эриксон» (Ericsson Telephone). GC10B — лампа для десятичного счета импульсов, следующих с частотой 4000 *гц*. Результат счета отмечается визуально. Выходной сигнал на катодном повторителе имеет величину 15 *в*. GC10M — миниатюрная счетная лампа, работающая на частоте 600 *гц*.

Десятичные счетчики фирмы «Райт Энджиниринг» (Wright Engng Co.) для преобразования напряжения в цифровую форму и наоборот — импульсов в напряжение. А. Б. Залкинд

6974. Лампы для десятичного счета (Decade counting tubes), Radio and Telev. News, 1953, 50, № 4, 20 (англ.)

См. реф. 6973.

6975. Электроннолучевая трубка для перемножения непрерывных величин. Анджело (An electron-beam tube for analog multiplication. Angelo E. J., Jr), Rev. Scient. Instrum., 1954, 25, № 3, 280—284 (англ.)

Описывается перемножатель со специальной электроннолучевой трубкой, построенный Лабораторией электроники Массачусетского технологического института. В идеальном перемножателе электронный луч кругового сечения относительно большого диаметра и с однородной по сечению плотностью тока проектируется на экран, состоящий из 4 металлических изолированных квадрантов.

Напряжения E_x и E_y, приложенные к отклоняющим пластинам, будут сдвигать луч соответственно на x и y. Ток, снимаемый с квадранта, будет пропорционален облучаемой площади, причем ток с 1 и 3 квадрантов берется положительным, со 2 и 4—отрицательным. Теперь, разбив площадь, как показано на рисунке (см. статью), и суммируя площади с учетом

знака, получим основное соотношение перемножателя:

$$(I_1 + I_3) - (I_2 + I_4) = K\,2x \cdot 2y = KE_x \cdot E_y.$$

Однако в реальном перемножателе из-за неравномерной плотности тока по сечению это соотношение не всюду выдерживается с большой точностью. Для точной работы перемножателя необходимо получить в центре луча возможно больший участок с равномерной плотностью тока.

Описываются факторы, влияющие на получение такого участка в луче. Первой задачей является выбор электронной пушки и электродов, формирующих луч, которые давали бы луч большего диаметра с однородной плотностью тока. В трубке была применена электронная пушка конструкции Пирса, в которой электронный луч выходит с дискового катода и представляет собой пучок параллельно летящих электронов. Формирующие электроды составляются из плоскостей, цилиндров и конуса. По выходе из такой пушки луч однороден, однако при переходе от пушки к экрану на состояние луча влияют пространственный заряд и различные эмиссионные скорости электронов. Пространственный заряд вызывает расширение луча, но не нарушает его однородности. Различие в эмиссионных скоростях дает уменьшение плотности тока к краю луча. Этот эффект может быть уменьшен применением больших ускоряющих напряжений и короткого луча. При длине луча, в 8 раз превышающей его диаметр, ускоряющем напряжении 300 *в* и температуре катода 1200°K плотность тока падает на 1,5% на расстоянии 0,5 радиуса от центра луча (далее падение происходит резче). В описываемой конструкции ускоряющее напряжение равно 300 *в*, длина луча 225 *мм*, радиус луча у экрана 18 *мм*. В меньшей степени на однородность луча влияют неудаленный газ и чувствительность луча к внешним магнитным полям. Экран представляет собой керамическую пластинку с 4 углублениями, в которые вложена фольга (квадранты). Сверху углубления прикрыты редкой сеткой, на которую подан соответствующий потенциал. Такое устройство предохраняет от перехода вторичных электронов с одного квадранта на другой. Керамическая пластинка имеет площадь 15 $см^2$ при толщине 6 *мм*, величина углубления 5 *мм*, толщина стенок, разделяющих квадранты, 1,25 *мм*. Большое значение имеет соблюдение перпендикулярности стенок, разделяющих квадранты. Отклонение от перпендикулярности на 0,3° дает ошибку в максимальном произведении, равную 1%.

Отклоняющая система состоит из 2 пар пластин, как в обычной электроннолучевой трубке. Устройство ее также значительно влияет на точность произведения. Ошибки исключаются выбором соответствующей геометрии пластин и точной их установкой.

При испытании перемножателя в статическом режиме ошибки не превышали 3% при максимальных произведениях, причем эти ошибки включали в себя все виды дрейфа нуля, так как регулировка не производилась в течение часа. При перемножении синусоидальных величин ошибка увеличивается с повышением частоты за счет влияния паразитных емкостей, шунтирующих выходную схему. В описываемом перемножателе частота (без существенной ошибки в произведении) могла достигать 20 *кгц*. В. Д. Князев

6976. Печатание результатов электронных вычислительных машин. Оверхофф (Das Drucken der Resultate elektronischer Rechenanlagen. Overhoff G.), Electron. Rundschau, 1955, **9**, № 10, 360—361 (нем.; рез. англ., русс.)

Сообщается о некоторых требованиях, предъявляемых к печатающим устройствам электронных вычислительных машин. Кратко рассматриваются возможности применения обычных печатающих устройств (электрические пишущие, бухгалтерские машины и табуляторы) для печати результатов вычислений вычислительных машин. Приводятся данные о производительности этих машин.

Рассматривается быстродействующее печатающее устройство электронной вычислительной машины УНИВАК. Импульсы на печатающее устройство поступают с магнитной ленты, на которой записывается 8 дорожек. Управление печатью осуществляется с помощью сменной коммутационной доски. С помощью коммутации меняется количество чисел в строке, избегается печатание нулей перед первой значащей цифрой и т. д. Скорость перемещения бумаги 500 *мм/сек*. Ширина бумаги от 100 до 710 *мм*. Литерные знаки (буквы, цифры и т. д.) в количестве 51 расположены на цилиндрической поверхности диска. 130 таких дисков жестко закреплены на валу, который может совершать вращательное движение с постоянной скоростью. Печать любого символа производится при срабатывании электромагнита, который воздействует на ударный молоточек, прижимающий бумагу к литерному знаку на диске.

Правильность печати контролируется специальным оптикоэлектронным литерным указателем и сравнивающим устройством. Вал с типовыми колесами имеет три скорости. Максимальная скорость печатания составляет 1300 знаков в 1 сек, т. е. 10 строк в 1 сек. В статье приводится принципиальная блок-схема печатающего устройства УНИВАК, две полуконструктивные схемы печатающего механизма. Н. П. Вашкевич

6977. Устройство с приемными кассетами для считывания с перфоленты (Perforated tape reader with take-up reels), Computers and Automat., 1955, 4, № 6, 147 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой «Поттер Инструмент» (Potter Instrument Co.) нового устройства «903» для считывания с перфоленты. Устройство является модернизацией механизма для протяжки магнитной ленты той же фирмы. В устройстве используются три мотора. Один для вращения 2 ведущих роликов и два для смотки и подмотки ленты. Изменение направления движения ленты осуществляется прижиманием ленты к одному из ведущих роликов, непрерывно вращающихся в разных направлениях. Считывание фотоэлектрическое. Время остановки ленты 5 *мсек*. Емкость кассет около 300 *м* перфоленты. Модель «903» выпускается в пяти различных вариантах в зависимости от скорости протяжки ленты (15; 7,5; 3,8 *м/сек*), ширины ленты (25,4; 22,4; 17,5 *мм*) и количества позиций (5, 6, 7 и 8). На максимальной скорости может читаться до 600 знаков в 1 сек. Управление устройством можно осуществлять вручную или импульсами амплитудой 25 *в*. Размер передней панели 65 × 48 *см*, вес 45 *кг*, потребляемая мощность 400 *вт*. А. И. Щуров

6978. Малогабаритные реле серии Z (Class Z relay outperforms miniatures), Computers and Automat., 1955, 4, № 6 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой «Отоматик Электрик Сэлс» (Automatic Electric Sales Corp.) реле серии Z. В серию входят реле пяти различных типов. Реле одного типа могут питаться только от постоянного напряжения 135 *в*, другие и от постоянного, и от переменного напряжения 115 *в*. Число контактных пружин меняется от 6 до 13 в зависимости от типа. Контакты одиночные и выдерживают мощность 150 *вт*. Максимальные размеры реле около 30 × 40 × 60 *мм*. Вес не превышает 170 *г*. А. И. Щуров

6979. Автоматическая программируемая сборочная система. Макдоналд (Automatic programmed component assembly system. Macdonald

Neil), Computers and Automat., 1955, 4, № 2, 34 (англ.)

Сообщается, что фирма «Дженерал Электрик» (General Electric) строит для войск связи США систему для автоматической сборки деталей в субблоки электронной аппаратуры (Automatic Component Assembly System — ACAS). Порядок работы системы задается при помощи перфокарт. Система автоматически производит нужные детали, испытывает и собирает их в субблоки со скоростью до 1600 шт. в 1 час. В. Д. Князев

6980. **Новый кремниевый диод, работающий при высокой температуре. Торнтон, Хэнли** (A new high temperature silicon diode. Thornton C. G., Hanley L. D.), Convent. Rec. IRE, 1954, part 3, 84—88 (англ.)

Сообщается, что фирмой «Сильвания» (Sylvania) разработан новый кремниевый плоскостной диод, работающий без изменения своих свойств при температурах до 300°. Диод имеет высокое обратное пробивное напряжение (70—200 *в*), малую барьерную емкость (0,3 $\mu\mu f$) и малое время восстановления. Технология изготовления диода основана на ионной бомбардировке кремния кислородом. Приводятся частотные характеристики точечно-контактного и плоскостного кремниевых триодов. Л. С. Гринграуз

6981. **Изготовляйте сами полупроводниковые триоды. Осборн** (Making your own transistors. Osborne J. M.), Short Wave Mag., 1954, 12, № 2, 74—81 (англ.)

Подробно описывается лабораторный способ изготовления точечных германиевых триодов. Триод, изготовленный по этому способу, был применен в передатчике (РЖМат, 1956, 1778). Л. В. Кутуков

6982. **Применение счетно-аналитических машин к вычислению гелиоцентрических координат больших планет. Куликов Д. К.,** Бюл. Ин-та теор. астрономии АН СССР, 1955, 6, № 3, 166—191

6983. **Операции с комплексными числами на счетной машине с единственным механизмом умножения. Бёш** (Die Berechnung einiger komplexer Werte auf einer Multipliziermaschine mit nur einem Multiplizierwerk. Boesch Walter), Z. angew. Math. und Phys., 1954, 5, № 4, 341—343 (нем.; рез. англ.)
См. РЖМат, 1955, 3997.

6984. **О контроле вычисления приращений координат с помощью двойного арифмометра. Никольский С. И.,** Сб. науч. тр. Кафедры маркшейдерского дела и геод. Донецк. индустр. ин-та, 1956, вып. 4, 47—49

985. **Логарифмический проекционный аппарат. Брускальони** (Calcolatore logaritmico a proiezione. Bruscaglioni R.), Riv. ingegneria, 1954, 4, № 4, 461, 463, 465; Atti Fondaz. «Giorgio Ronchi», 1954, 9, № 2, 143—147 (итал.)
См. РЖМат, 1955, 5446—5447.

6986. **Краткая история работы Кафедры счетно-решающих приборов. Доброгурский С. О.** В сб.: Счетно-решающие приборы, М., Оборонгиз, 1955, 3—5

Кратко излагается история возникновения Кафедры счетно-решающих приборов в МВТУ и работ, проводимых ею. В. Д. Князев

6987. **Электронные вычислительные машины. Дюкрок** (Calculatrices électroniques. Ducrocq Albert), Larousse mens., 1955, 13, № 492, 691—692 (франц.)

Популярный обзор развития вычислительной техники. Приводятся данные вычислительных машин ЭНИАК, ЭДСАК, СВАК, ЛЕО. А. А. Крупский

6988. **Возможное влияние электроники на развитие промышленности. Ремон** (Influence possible de l'électronique sur le développement industriel. Raymond F. H.), Electronique, 1955, № 109, 41—46 (франц.)

Обзор средств автоматики (в основном, электронной), служащих для управления производственными процессами, и возможностей, которые могут быть достигнуты с применением для этой цели цифровых быстродействующих машин. Рассмотрены общие вопросы цифровой техники — системы кодирования, программного управления и сочленения машины с управляемым объектом. Популярно описаны основные узлы вычислительной машины и их взаимодействие.

Приводятся некоторые данные об использовании вычислительных машин фирмы SEA для регулирования промышленных процессов. А. А. Крупский

6989. **Введение в электронные вычислительные машины. Рей** (An introduction to electronic computers. Wray D.), Irish Build., Constr. and Engng J., 1955, 5, № 8, 486—489 (англ.)

Кратко, в популярной форме изложены основы построения и принципы работы моделирующих устройств и цифровых вычислительных машин. В. П. Кузнецова

6990. **Как повлияет автоматизация на вашу работу. Бендинер** (How automation will affect your job. Bendiner Robert), Mechanix Illustr., 1955, 512, № 10, 59—63, 212—215 (англ.)

В популярной форме описывается будущее техники, использующей электронные вычислительные машины. Приводятся сведения, дающие примеры полной автоматизации производственных процессов и даже целых заводов. Б. П. Стрелков

6991. **Электронные цифровые вычислительные машины. 1. Элементы арифметических устройств. Вудс-Хилл** (Electronic digital computers. 1. Basic arithmetic circuits. Woods-Hill W.), Wireless World, 1955, 61, 557—562 (англ.)

Элементарное описание статического триггера, клапанов (каскадов совпадения) на пентоде и на диодах, одной из возможных схем сумматора, сдвигающего регистра и последовательного арифметического узла, работающего в двоичной системе счисления, а также упрощенной блок-схемы электронной цифровой вычислительной машины. М. А. Карцев

6992 К. **Электронный перфоратор ИБМ Франс-626** (Calculatrice électronique, type 626. Paris, Compagnie I. B. M. France, 1955, 93 p., ill.), Bibliogr. France, 1955, 144, № 50, 1117 (франц.)

6993 К. **Арифметические операции в цифровых вычислительных машинах. Ричардс** (Arithmetic operations in digital computers. Richards Richard Kohler. Van Nostrand; London, Macmillan, 1955, 397 pp., 7.50 doll., 52 sh., 6 d.), Cumul. Book Index, 1955, 58, № 7, 98 (англ.)

6994 К. **Введение к электронным моделирующим устройствам. Уасс** (Introduction to electronic analogue computers. Wass Charles Alfred Alan, London, Pergamon Press, 1955, X, 237 pp., ill., 40 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 292, 19 (англ.)

6995 К. **Полупроводниковые триоды и кристаллические диоды: что они из себя представляют и как их применять. Бетридж** (Transistors and crystal diodes: what they are and how to use them. Bettridge Bernard Robert, London, 1954, X, 11—72 pp., ill., tabl., diagr., 5 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 255, 13 (англ.)

6996 К. **Счетно-аналитические машины. Хоменко П. Г.,** М., Машгиз, 1955, 288 стр., илл. 14 р. 15 к.

6997 К. **Логарифмическая доска для решения систем линейных уравнений. Соловьев Р. Н.** Моск. технол. ин-т пищ. пром-сти, М., 1955, 11 стр., илл., б. ц.

6998 К. **Практическое руководство по счетной линейке. Широких И. И.** Томский политехн. ин-т., Томск. 1955, 80 стр., илл., 4 р.

6999 К. **Словарь терминов, относящихся к цифровым вычислительным машинам** (Glossary of terms relating to automatic digital computers. London. Brit. Standards Inst., 1955, 15 pp., 3 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 316, 9 (англ.)

7000 К. **Справочник для вычислителей. Скан** (Handbook for computers. Skan Sylvia W., London, Dept. Scient. and Indust. Res., 1954, vol. 1, v, 145 pp., vol. 2, 1, 146—318 pp., 15 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 296, 8 (англ.)

7001 П. **Коммерческие машины с продолжительным хранением информации. Галлуп** (Continuous record business machines. Gallup Floyd H.) [Rudolph W. Dauber]. Пат. США 2709041, кл. 235—61, 24.05.55

Электронная машина, предназначенная для регистрации различной цифровой информации. Управление вводом и выводом данных осуществляется с помощью клавиатуры.

Е. И. Мамонов

7002 П. **Булевская вычислительная машина** (Boolean computer) [Hughes Tool Co.]. Австрал. пат. 160767, кл. 05.5, 10.02.55

Машина для производства математической операции сложения или вычитания с N двоичными знаками. Результат математической операции выражается в виде булевского уравнения с «логическими» операциями умножения и сложения. Так как имеется соответствие между «логическими» умножением и сложением и логическими операциями «и» и «или» соответственно, то все перемножаемые величины подаются в соответствии с логическим уравнением на дешифратор типа «и», а все суммируемые величины на дешифратор типа «или». Выходы дешифраторов сводятся к одному.

Н. Н. Рикко

7003 П. **Запись цифровой информации на магнитном барабане и запоминающий регистр. Мак-Гайган, Мерфи, Ньюби** (Magnetic drum dial pulse recording and storage register. McGuigan John H., Murphy Orlando J., Newby Neal D.) [Bell Telephone Labs, Inc.]. Пат. США 2709148, кл. 340—174, 18.01.55

Устройство для записи на магнитном барабане цифровой информации, представленной уровнями напряжений.

А. И. Щуров

7004 П. **Регистр для запоминающих устройств электронных вычислительных машин. Куффиньяль** (Registering device for electronic [illegible] Pierre Louis) [Soc. Civile d'Etudes de Calcul Automatique (S. C. E. C. A.)]. Пат. США 2709042, кл. 235—61, 24.05.55

Регистр на газоразрядных лампах для хранения информации в вычислительных машинах.

Е. И. Мамонов

7005 П. **Запоминающее устройство** (Information storage circuit) [Standard Telephones and Cables Pty. Ltd]. Австрал. пат. 159884, кл. 05.5, 2.12.54

Регистр на электрических переключателях с устройством для выборки определенной части хранящейся информации.

О. П.

7006 П. **Электронное множительное устройство. Вуде-Хилл, Дейвис** (Electronic multiplier. Woods-Hill William, Davis David Thomas) [International Business Machines Corp.]. Пат. США 2690507, кл. 250—27, 27.12.50

Множительное устройство на триггерном регистре.

Л. С. Г.

7007 П. **Испытательная система. Стриклер** (Testing system. Strickler Walter B.) [Bell Telephone Labs, Inc.]. Пат. США 2692728, кл. 235—61, 26.10.54

Десятичный сумматор с циклическим переносом с регистрами для входных величин, для частичных сумм и для результатов. Сумматор представляет часть испытательной системы, приведенной на блок-схеме.

В. К. Зейденберг

7008 П. **Счетные цепи** (Counter circuits) [Power-Samas Accounting Machines Ltd]. Австрал. пат. 161419, кл. 05.5, 10.03.55

Электронный счетчик импульсов, состоящий из четырех триггерных каскадов на вакуумных лампах и одной схемы совпадения на двух полупроводниковых диодах.

В. И. Мараховский

7009 П. **Электронный счетчик. Муди** (Electronic counter. Moody Norman F.) [National Research Council]. Пат. США 2698383, кл. 250—27, 28.12.54

Триггерная ячейка на двух пентодах с запуском через вспомогательный пентод и трансформаторным выходом.

А. В. Аваев

7010 П. **Триггер на кристаллических триодах** (Transistor trigger) [Standard Telephones and Cables Pty. Ltd]. Австрал. пат. 162171, кл. 05.5, 7.04.55

Описывается триггер на двух однотипных кристаллических триодах.

Г. И. Танетов

7011 П. **Электронное переключающееся устройство. Лер** (Electron switching device. Lair Julien J. B.) [Federal Telecommunication Labs. Inc.]. Пат. США 2651740, кл. 315—167, 8.09.53

Устройство состоит из газоразрядной лампы, имеющей один анод, несколько катодов и вспомогательных цепей автоматического смещения. Цепи смещения выбраны таким образом, что при подаче импульсов от источника на вспомогательный электрод разряд в лампе перебрасывается с одного катода на другой.

Л. В. Кутуков

7012 П. **Шифратор электрических сигналов. Мандель** (Electric signal encoder. Mandel Paul) [La Radio-Industrie S. A.]. Пат. США 2667633, кл. 340—354, 26.01.54

Последовательный регистр на мультивибраторах для передачи двоичной информации. Мультивибраторы запускаются друг от друга через дифференцирующие цепочки.

В. К. Зейденберг

7013 П. **Импульсно-кодовая модулирующая система** (Pulse-code modulation system) [General Electric Co. Ltd]. Австрал. пат. 156791, кл. 05.5, 17.06.54

Сообщается о преобразовании сигналов с импульсно-кодовой модуляцией в код с фазово-импульсной модуляцией. Различное значение сигнала характеризуется тем, что кодовые группы подаются в линию задержки, имеющую равностоящие ответвления. Количество и порядок ответвлений совпадает с количеством и порядком положительных и отрицательных импульсов, встречающихся в кодовой серии. Имеются две выходные линии — одна для положительных, другая для отрицательных импульсов. Выходные линии присоединены к преобразующему устройству.

Л. С. Гринграуз

7014 П. **Электронная счетная лампа** (Electronic counting device) [Commonwealth Scientific and Industrial Research Organisation]. Брит. пат. 699863, 18.11.53, Instrum. Practice, 1955, 9, № 1, 69 (англ.)

Описывается электронная десятичная счетная лампа. Для изменения состояния счетчика не требуется генерирования специальных импульсов, а достаточно, чтобы входной уровень поднялся выше некоторого критического уровня, а затем упал ниже второго критического уровня.

В. Д. Князев

7015 П. **Усилитель-компрессор для многоканальной импульсной системы** (Compandor for multiplex pulse

system) [Standard Telephones and Cables Pty. Ltd]. Австрал. пат. 159162, кл. 05.5, 14.10.54

7016 П. Схема контроля для клавишной машины. Беркхарт (Keyboard checking circuit. Burkhart William H.) [Monroe Calculating Machine Co.]. Пат. США 2700755, кл. 340—149, 25.01.55

Устройство, проверяющее правильность записи информации на магнитном барабане после передачи кода с клавишного ввода на барабан. В. Н. Лаут

7017 П. Печатающая вычислительная машинка. Сандстранд (Printing calculator mechanism. Sundstrand Oscar J.) [Underwood Corp.]. Пат. США. 2695134, кл. 235—60.25, 23.11.54

Механизмы счетной печатающей вычислительной машинки. Н. Н. Парусникова

7018 П. Суммирующая машина, имеющая механизм для представления отрицательных итогов прямыми числами. Карлсон, Фриберг, Ларсен (Calculating machine having true negative totals mechanism. Carlson Carl H., Frieberg Nelson R., Larsen Oscar F.) [The National Cash Register Co.]. Пат. США 2666574, кл. 235—60.2, 19.01.54

Суммирующая машина, которая позволяет снимать отрицательные итоги прямыми числами. Дается описание конструкции механизма для смещения счетчика в случае, если итог в счетчике отрицателен. Такое смещение обеспечивает печать отрицательного итога прямым числом. Е. Н. Маквецов

7019 П. Механизм передачи десятков в счетной машине (Tieroverf'ringsmekanisme) [Aktiebolaget Atvidaberg-Facit]. Дат. пат. 77810, кл. 42 *m*-17, 12.07.54

Описание конструкции механизма передачи десятков в счетчике оборотов шведского рычажного арифмометра «Оригинал Однер». В каретке арифмометра, на которой монтируются счетчики, находится длинная шестерня, воспринимающая реверсивное движение через систему шестерен от вращающегося установочного барабана. Длинная шестеренка передает движение валику с кулачками. Кулачки могут перемещаться вдоль оси. Перемещение кулачков осуществляют десяточные рычажки, воспринимающие импульс от цифровых колес, во время перехода из положения «0» на «9» и обратно. При вращении кулачкового валика смещенный кулачок прибавляет или отнимает единицу в старшем соседнем разряде. Возврат кулачков в исходное положение осуществляется теми же десяточными рычажками, которые поворачиваются выступами кулачкового валика. А. П. Бабушкин

7020 П. Устройство для ввода и запоминания данных для машин по обработке статистических данных. Джонсон, Юргенс, Монигл (Anordning för mottagning och magasinering av data speciellt vid statistikmaskiner. Johnson R. B., Jurgens H. A., Moneagle O. F.) [International Business Machines Corp.]. Швед. пат. 140033, кл. 43a: 41/01, 21.04.53

7021 П. Прибор для электрического разложения векторов. Электрические моделирующие системы. Лангем, Белл, Баккингем (Apparatus for electrical resolution of vectors. Langham E. M., Bell J., Buckingham J.). Брит. пат. 696283, 26.05.53, Abridgms. Specifics. of Invents, Group XXXVI, 327—328 (англ.)

Прибор имеет статор и ротор с двухфазными синусоидально распределенными обмотками, причем обмотка каждой фазы статора (или ротора) состоит из 2 катушек, одна из которых служит для устранения ошибок, вызванных нелинейной магнитной проницаемостью и температурным коэффициентом обмоток. П. В. Соловьев

7022 П. Приспособление для указания логарифмического значения физической величины. Электрические моделирующие системы; измерение уровня передачи (Means for indicating the logarithmic value of a magnitude. Electric analogue calculating systems; transmission level measuring) [Electric and Musical Industries, Ltd]. Англ. пат. 696213, 26.08.53, Abridgms. Specifics of Invents. Group XXXVI, 322—323 (англ.)

Описан прибор, работающий на следующем принципе: когда напряжение с волной экспоненциальной формы становится равно напряжению, пропорциональному измеряемой величине, величина тока, текущего через измерительный прибор, резко изменяется, а в конце экспоненциального периода возвращается к первоначальному значению, так что средний ток, показываемый прибором, пропорционален логарифму измеряемой величины. Описано применение этого принципа в схеме для указания пикового звукового уровня при передаче радиопрограммы. Мультивибратор на двойном триоде посылает импульсы на сетку пентода. Под действием импульса пентод отпирается и заряжает конденсатор, который разряжается затем через параллельное сопротивление. Это экспоненциальное пилообразное напряжение подается на первую сетку следующего двойного триода, в катодную цепь которого включен другой пентод, а на вторую сетку подается напряжение, пропорциональное пиковому уровню звука. Когда экспоненциальное напряжение уравнивается с напряжением сигнала, анодное напряжение двойного триода повышается и дает отпирающий импульс на сетку третьего двойного триода с прибором в анодной цепи, который показывает логарифмическую величину уровня передачи. И. В. Соловьев

7023 П. Предсказание изменения переменной, являющейся функцией времени (Predicting changes in a variable function of time) [Abax Corp.]. Австрал. пат. 116118, кл. 00.2; 89.4, 20.01.55

Механический прибор для предсказания величины изменения переменной, зависящей от времени, за данный интервал времени путем определения второй производной. В. К. Зейденберг

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

7024. Промышленность использует специализированные машины. Кунел (Industrial uses of special-purpose computers. Kuhnel A. H.), Instrum. and Automat., 1955, 28, № 7, 1108—1113 (англ.)

Рассматриваются возможности построения специализированных машин для целей управления производственными процессами.

Подробно описывается специализированная машина для автоматической подборки пластин железа при наборе пакета магнитопровода мотора с весьма жесткими допусками по толщине. Пакет, набираемый из 20 пластин, должен иметь толщину 9,4 *мм* + 0,05 *мм* т. е. каждая пластина должна была бы иметь толщину 0,47 *мм* + 0,0025 *мм*. Машина позволяет применять стандартные пластины № 26 и № 27, комбинируя их так, чтобы толщина полного набора укладывалась в требуемый допуск. Набивная машина работает со скоростью 100 пластин в 1 мин. Следовательно, подбор пакета должен производиться автоматически специализированной машиной. Разработка и постройка такой машины требует затрат в размере 10—20 тыс. долл. Производительность машины в месяц составит 68 000 сердечников. Приводятся фото двух блоков машины.

Рассматривается моделирующее устройство, управляющее копировальным фрезерным станком для

обработки лопаток турбины. Станок имеет 8 одновременно работающих шпинделей. Девятый шпиндель, который является датчиком, движется в трех измерениях по образцу лопатки. Все шпиндели вращаются синхронно. На каждом из 8 шпинделей размещены фрезы. Вычислительная машина управляет скоростью обработки поверхности в зависимости от формы профиля, поддерживая все время оптимальную нагрузку станка.

Приводится краткое описание устройства «Дататрол» для записи данных о положении вращающихся валов в форме, удобной для обработки на цифровой вычислительной машине. А. Б. Залкинд

7025. Применение управления посредством электронных вычислительных машин. Вильямсон (Applying electronic computer controls. Williamson D. T. N.), Mach. Design, 1955, **27**, № 10, 238—242 (англ.)

Описывается система управления металлорежущими станками, разработанная фирмой «Ферранти» (РЖМат, 1955, 5490; 1956, 4234). Система состоит из перфоратора для набивки на ленте информации об изготавливаемой детали, вычислительной машины, преобразующей эту информацию в запись на магнитной ленте, и устройства управления станком, получающего команды с магнитной ленты. В устройстве управления станком для измерения перемещения салазок применяется оптический метод, при котором перед фотоэлементом устанавливаются 2 диффракционные решетки, перемещающиеся друг относительно друга при движении салазок.

Движением станка управляет цифровая следящая система. Следящая система состоит из реверсного счетчика, устройства для задания скорости и направления движения салазок и позиционной обратной связи. Последовательность импульсов, характеризующая движение салазок, приходит на реверсный счетчик и на устройство задания скорости. Скорость задается пропорционально частоте следования импульсов. Обратная связь осуществляется посылкой импульсов с оптической измерительной системы на реверсный счетчик, причем разница между числом импульсов с магнитной ленты и от измерительной системы не должна превышать одного импульса. Это означает, что ошибка в положении салазок не превышает половины линии диффракционной решетки.

Контроль правильности работы устройства управления осуществляется двумя счетчиками, считающими в разных направлениях, причем один из них получает импульсы с магнитной ленты, а другой от оптической измерительной системы. Если суммарное состояние обоих счетчиков будет необычным, то станок останавливается. При смене направления движения салазок для компенсации люфта вычислительная машина выдает и записывает один импульс, определяющий обратное направление, а через доли секунды — и остальную последовательность импульсов, давая возможность следящей системе выбрать люфт в этот промежуток времени. В. Д. Князев

7026. К автоматической фабрике. Морли (Towards the automatic factory. Morley Derek Wragge), New Zealand Electr. J., 1955, **28**, № 4, 129—130 (англ.)

Кратко приводятся примеры применения электронных вычислительных машин для управления производственными процессами. На сборочном заводе фирмы «Остин» (Austin Motor Co.) управление подборкой деталей для главной линии производится при помощи электронной вычислительной машины, получающей информацию с перфокарт. Фирма «Ферранти» разрабатывает электронную цифровую вычислительную машину для управления 50 металлорежущими станками. Эта машина позволяет быстро, без переоборудования завода, переходить с одного изделия на другое или вносить в изделие конструктивные изменения. В. Д. Князев

7027. Электроника в конторе (Electronics in the office), Electr. Contractor and Retailer, 1955, **53**, № 623, 44—48 (англ.)

Приводятся соображения о возможности применения вычислительных машин в коммерческих конторах, примеры применения машин и данные о ряде ведущихся в настоящее время разработок.

Сообщается, что коммерческие расчеты содержат обычно до 80% сложений и вычитаний, 14% умножений, 5—6% делений. Электронная вычислительная машина может быть центральным звеном в автоматизированной конторе. Она может быть легко соединена с обычным перфокартным оборудованием. Фирмы «Ферранти» (Ferranti) и «Паурс Сеймас» (Powers Samas) разрабатывают комбинацию перфорирующих и воспринимающих блоков (причем воспринимающие блоки будут прочитывать карандашные и чернильные записи) с электронной вычислительной машиной. В системе предусматривается также применение перфолент и магнитных лент. Ожидается, что разработка такой системы займет 3 года. Такая система могла бы получать данные от отдаленных контор в виде перфоленты. Фирма «Берроус» разрабатывает электронное устройство для ввода данных с перфокарт, которое обрабатывает 1800 карт в 1 мин., и печатающее устройство, которое печатает данные со скоростью 900 стр. в 1 мин. Для машины УНИВАК разрабатывается печатающее устройство со скоростью печати 600 строк в 1 мин. Фирма «Буль» (Bull) выпустила печатающее устройство с 92 печатающими колесами, которое может печатать до 130 строк в 1 мин. Приводятся некоторые данные вычислительных машин ИБМ-702, ХЕК, Е-101.

В. Д. Князев

7028. Электроника в конторе. Ч. II (Electronic in the office.— Part II), Electr. Contractor and Retailer, 1955, **53**, № 624, 156, 157, 159 (англ.)

Продолжение статьи (реф. 7027). Рассматриваются устройства записи и хранения информаций в коммерческих машинах.

Наиболее быстрым и удобным устройством для записи и считывания информаций является магнитная лента. Примером подобного использования магнитного запоминающего устройства является машина для продажи билетов на самолеты фирмы «Ремингтон Ранд». Запись информации на перфокартах в настоящее время сохраняет свое значение. Индустриальным расчетным товариществом (Industrial Accountancy Partnership) разработано устройство, при помощи которого информация с перфоленты переносится на перфокарты со скоростью 3000 карт в 1 час. Для увеличения скорости вывода информации фирмой «Кодак» (Kodak) разработано устройство с движущимся пером, способное записать до 2000 цифр в 1 сек., и специальное печатное устройство, которое может печатать до 500 чисел в 1 сек.

Французское общество электроники и автоматики (French Society of Electronics and Automation) создало устройство для вывода информации на 35-*мм* микрофильм, который может быть прочитан и затем введен обратно в вычислительную машину. В. Д. Князев

7029. Сбор данных как побочный результат работы коммерческой машины. Тейлор (Data collection as a by-product of normal business machine operation. Taylor J.). Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 34—41 (англ.)

Рассматривается автоматическая система сбора данных, используемых в торговой сети для контроля запасов товаров на складах, для составления ежедневных докладов о продаже товаров и т. п. Обычный кассовый аппарат может дать ряд данных о продаже

в виде чеков, однако ручная сортировка этих данных и обработка занимают много времени и не исключают ошибок. Точность ручной сортировки и обработки данных оценивается в 80—90%.

Приводится автоматическая система сбора данных, разработанная фирмой «Нейшнл Каш Реджистр» (National Cash Registor Co.) и используемая на складах крупного универсального магазина. Эта система, электрически связанная с кассовыми аппаратами, включает в себя перфоратор и позволяет переносить данные, набираемые на клавишной панели кассового аппарата, на перфоленту. Продавец сначала устанавливает на клавишной панели данные, относящиеся к характеристике товара. После того как эта последовательность будет пробита на перфоленте, на клавишной панели устанавливаются данные, относящиеся к продаже товара (количество единиц товара, цена, отдел, номер продавца и номер кассы). Если производится продажа нескольких видов товара, то каждый вид обрабатывается таким же образом, причем стоимость товаров суммируется кассовым аппаратом, и покупатель получает единый чек.

В крупных магазинах, имеющих большую номенклатуру товаров, характеристика отдельного вида товаров включает порой до 25—30 цифр. Это приводит к тому, что характеристика переносится на перфоленту в несколько приемов (на клавишной панели кассового аппарата можно набрать только ряд из 7 цифр).

Дальнейшая автоматизация учета производится с помощью включения в систему сбора данных дополнительного считывающего устройства. При этом характеристики товаров набиваются на коротких кусках перфоленты, которые при продаже данного вида вводятся в считывающее устройство и копируются перфоратором.

Указывается, что рулон бумажной ленты длиной 300 *м* содержит до 120 000 цифр. Приведены фотографии отдельных узлов и блок-схема системы сбора данных.

В. Д. Князев

7030. Применение автоматического вычислительного оборудования в сберегательных кассах. Браун (The application of automatic computing equipment to savings bank operations. Brown R. Hunt), Computers and Automat., 1955, 4, № 7, 18—21 (англ.)

Описывается предполагаемая система автоматизации работы сберегательных касс с использованием имеющихся вычислительных машин. Приказчик имеет у своего окна телеграфный аппарат, электрически связанный с центральной конторой, имеющей вычислительную машину, и справочное устройство, которое доставляет ему визуально информацию о счете вкладчика. Справочное устройство имеет 7 окошек, в которых могут появляться цифры от 0 до 9 в каждом. Информация должна прочитываться менее чем за 1 сек. при любой загрузке машины. На панели имеется световой индикатор, показывающий необычность операции: утерянная сберкнижка, необычный (чрезмерный) запрос и т. д. Описаны различные процедуры, встречающиеся в работе сберегательных касс. В. Д. Князев

7031. Выявление с помощью вычислительной машины экономичного режима работы электрической системы, состоящей из тепловых и гидравлических станций. Сайпсер (Computer search for economical operation of a hydrothermal electric system. Cypser R. J.), Power Appar. and Systems, 1954, № 14, 1260—1267 (англ.)

Рассматривается вопрос о применении вычислительной машины для нахождения экономичного режима энергосистемы. Предлагаются три варианта использования вычислительной машины:

1) В машине могут быть запасены решения при всех возможных сочетаниях входных данных. В этом случае вычислительная машина должна находить соответствующее решение для данного момента.

2) Если существует уравнение системы в виде функции от входных данных, то вычислительная машина, подставляя в это уравнение текущие данные, легко может найти решение для заданного момента. Однако такого рода уравнения могут быть получены лишь для ограниченного числа простых систем.

3) Вычислительная машина может оценить относительное преимущество в незначительных изменениях всех переменных и, производя такие изменения, привести систему постепенно, шаг за шагом к оптимальному режиму работы.

В дальнейшем автор останавливается на методе, предложенном в третьем варианте. Для исследования была выбрана конкретная система, состоящая из одной тепловой электростанции, работающей на дорогом топливе, и двух гидростанций, работающих на связанных водотоках и имеющих приплотинные водохранилища. Чтобы воспользоваться указанным выше методом, была создана математическая модель системы. Выражение для издержек системы за расчетный период является сложной функцией от следующих переменных: нагрузки системы; наличия сырья (в данном случае, естественный сток воды и стоимость топлива), уровня воды водохранилища системы (регулирующий фактор); скорости изменения регулирующего фактора во времени.

В свою очередь вышеуказанные переменные являются временными функциями. Большую часть характеристик элементов системы автор задает эмпирически как результат аппроксимации опытных кривых. Пользуясь выражением градиента издержек за расчетный период по регулирующему фактору, автор находит выражение для элементарного изменения регулирующего фактора, при котором происходит сокращение величины издержек. Выражение для градиента имеет вид уравнения Эйлера в частных производных, а значение оптимального изменения регулирующего фактора пропорционально уравнению Эйлера с противоположным знаком. Следовательно, задача вычислительной машины сводится к запоминанию характеристик работы всех элементов системы, вычислению частных производных от отдельных компонент издержек, подстановке данных в уравнение Эйлера и нахождению оптимального изменения регулирующего фактора. Затем тот же процесс повторяется с новым значением регулирующего фактора. Повторяя этот процесс многократно, можно приблизиться к оптимальному режиму с желаемой точностью. Такой расчет производится для каждой гидростанции, в каждой контрольной точке, например, еженедельно. В результате получаются графики работы каждого из элементов системы за расчетный период, например год.

Для экспериментов автор пользовался машиной Вихрь I. Кроме производства вышеуказанных вычислений, машина печатала величину годовых издержек после каждого цикла коррекции, а также периодически печатала исправленные серии графиков запаса воды в водохранилище, выработки электроэнергии и еженедельных издержек. Приводится схема системы регулирования, а также экспериментальные графики отражающие изменения в параметрах системы после ряда коррекций. Б. И. Шитиков

7032. Как Вы можете позвонить по автоматическому телефону с одного побережья на другое. Тейлор (Now you dial coast to coast. Taylor Frank J.), Poupl. Sci., 1955, **167**, № 4, 118—121, 274, 286 (англ.)

Описывается автоматическая междугородная телефонная система ДДД (Direct Distance Dialing), разработанная фирмой «Белл Телефон Систем» (Bell Telephone System). В Инглвуде, США (Englewood, N. J.), с ноября 1951 г. действует автоматическая междугородная телефонная система, обслуживающая 10 тыс. абонентов. К настоящему времени эта система охватывает 250 тыс. телефонных точек, и предполагается подключить к ней в 1956 г. еще 56 районов страны. Остальные районы будут подключаться по мере выполнения программы модернизации телефонной сети, охватывающей почти все 58 млн. телефонных точек США и Канады.

Введение ДДД потребовало перехода на единую систему номеров по всей стране. Был принят семизначный номер для каждого абонента, однако этого было недостаточно, чтобы охватить все 58 млн. абонентов, поэтому страну разделили на 101 район и каждому из этих районов присвоили свой трехзначный код. Для междугородного переговора необходимо сначала набрать районный код, а затем номер абонента. Вторая цифра в районном коде 0 или 1. Единица расшифровывается телефонной станцией как междугородный вызов. При этом вступает в работу ДДД — вызов поступает на переключающий центр, где запоминаются номера связываемых абонентов, и информация передается на искатель, который отыскивает свободную нужную линию, подключает к ней абонента и посылает номер на переключающий центр вызываемого района. Этот переключающий центр подключает к линии вызываемого абонента. Система работает в 100 раз быстрее человека. Узел, запоминающий номера абонентов, связан с узлом, который перфорирует эти номера, время соединения и время переговоров на бумажной ленте; раз в сутки лента снимается и ставится на сортировочную машину, которая переносит данные на перфокарты. Данные с перфокарт при помощи бухгалтерской машины переносятся на счета абонентов. Сообщается, что точность работы системы высока. На 5 000 счетов за переговоры был только один протест. Предполагается, что стоимость вызова по ДДД будет на 40% ниже, чем при ныне существующей системе.

В. Д. Князев

7033. Избирательный вызов в радиотелефонных сетях. Поллард (Selective calling for radiotelephone systems. Pollard J. R.), Electronic Engng, 1953, 25, № 310, 490—496 (англ.)

Описаны три системы автоматического телефонного вызова абонента, в счетных цепях которых употребляются тиратроны с холодным катодом и лампы типа декатрон.

7034 П. Вычислительная машина для определения времени взрывателя. Хейденберг, Робертс (Fuze time computer. Heydenburg Norman P., Roberts Richard B.). Пат. США 2663496, кл. 235—61, 5, 22.12.53

Схема электронной счетной машины для определения времени, которое нужно установить на взрывателе снаряда. Машина включает в себя датчики координат и скорости движения цели, датчики времени полета снаряда и времени запаздывания между операциями установки взрывателя и открытием огня, блоки, производящие необходимые математические операции, и другие вспомогательные блоки.

П. В. Тихонов

7035 П. Вычислительные приборы. Электрические моделирующие системы; неметаллические сопротивления, зависящие от температуры (Computing devices. Electric analogue calculating systems; temperature variable non-metallic resistances) [N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken]. Англ. пат. 695866, 19.08.53, Abridgms, Specifics. of Invents. Group XXXVI, 315—316 (англ.)

Схемы для определения относительной влажности с сопротивлениями, имеющими экспоненциальную зависимость от температуры, аналогичную уравнению Клапейрона для давления пара. Такое сопротивление может состоять из Tl_2S и TiO_2 в отношении 1 : 110,6 или из стержней из 120 *г* $NiCO_3$ и 3,34 *г* $Li\,CO_3$, подвергнутых обжигу в течение 2 час. при 1200°.

И. С. Соловьев

7036 П. Вычислительное устройство для определения цвета смеси. Дейвидсон (Color mixture computer. Davidson Hugh R.) [General Aniline and Film Corp.]. Пат. США 2671609, кл. 235—61, 9.03.54

Механическое устройство для определения величины коэффициента отражения смеси красителей по спектрофотометрическим кривым ее составляющих.

Н. Ф. Семикова

7037 П. Счетная линейка для определения стоимости строения. Даулинг, Гамильтон (Building cost slide rule. Dowling Robert L., Jr Hamilton Jack C.) [Warren P. Hunnicutt]. Пат. США 2706081, кл. 235—70, 12.04.55

Многошкальная (в том числе и с логарифмической шкалой) счетная линейка с двумя движками, служащая для подсчета стоимости строительного сооружения на квадратный фут площади.

П. А. Вильнер

См. также: 6855, 6893

НОВЫЕ КНИГИ, ПОСТУПИВШИЕ В РЕДАКЦИЮ

Избранное. Вейль (Selecta. Weyl Hermann. Basel-Stuttgart, Birkhäuser, 1956, 592 S.) (нем.)

Мера, интеграл и их алгебраизация. Каратеодори (Mass und Integral und ihre Algebraisierung. Carathéodory C. Basel-Stuttgart, Birkhäuser, 1956, 337 S.) (нем.)

Симметрия. Вейль (Symmetrie. Weyl Hermann. Übers. aus dem Engl., Basel-Stuttgart, Birkhäuser, 1955, 157 S., ill.) (нем.)

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Азбелев Н. В. 6847
Айзенштат Н. Д. 6902
Аленицын Ю. Е. 6526
Андриевский Ф. П. 6307 К
Аржаных И. С. 6619, 6678
Аронович Г. В. 6609
Артемов А. К. 6306

Б

Бабушка И. 6540
Бабушкин Л. И. 6771 К
Бадалян Г. В. 6550, 6551
Базилевич И. Е. 6588
Барыбин К. С. 6313 Д
Бахвалов Н. С. 6849
Бахвалов С. В. 6896, 6897
Бачурин Г. Ф. 6431 Д
Берман С. Д. 6405
Берман Я. Р. 6307 К
Бернал Дж. 6299
Боголюбов Н. Н. 6714, 6715
Бондар' М. Г. 6935
Борисов Д. М. 6788 Д
Борисович Ю. Г. 6691
Бочек Л. В. 6850
Бронштейн И. Н. 6680 К
Букарев Б. Я. 6782

В

Ван Шоу-жэнь 6732
Ван Шоу-и 6381
Верцинский А. 6302
Виленкин Н. Я. 6304
Виноград Р. Э. 6573
Волков Ю. А. 6773 Д

Г

Гагаев Б. М. 6515
Гаджиева М. Г. 6853
Гаек О. 6639
Гаман К. 6481
Гантмахер Ф. Р. 6607
Гахов Ф. Д. 6624
Гельфанд И. М. 6705
Герчинский Р. 6690
Гинзбург Г. М. 6725
Глушков В. М. 6419, 6429 Д
Гордон В. О. 6786 К
Гохберг И. Ц. 6685, 6686
Граев М. И. 6705, 6706
Грибанов Ю. И. 6688
Гробман Д. М. 6579 Д
Губарь Е. Г. 6577 Д
Гуревич С. Г. 6852
Гу Чао-хао 6817

Д

Джапаридзе И. С. 6785
Джрбашян М. М. 6534
Дивеев Р. Х. 6724
Добровольский В. А. 6328 Д
Доброгурский С. О. 6986
Доморяд А. П. 6928
Домрачева Г. И. 6474 Д
Дун Гуан-чан 6340
Дымент З. М. 6473 Д

Е

Евграфов М. А. 6521, 6554 К
Ефимов Н. В. 6837

З

Задирака К. В. 6297
Злотопольский М. Д. 6779
Зубова А. Ф. 6562

И

Иваницкая В. П. 6771 К
Илиев Л. 6525
Ильин В. А. 6596, 6597
Имшенецкая Е. Ф. 6614
Исикава 6878
Ито 6692

Й

Йосида 6308 К

К

Кауров В. А. 6757
Келдыш Л. 6477
Киётия 6311 К
Кованцов Н. И. 6805, 6806
Кордемский Б. А. 6309
Коренблюм Б. И. 6654
Косинский А. 6483
Костовский А. Н. 6759
Костомаров Д. П. 6578 Д
Костюченко А. Г. 6799
Крейн М. Г. 6568
Крейнес М. А. 6902
Кропачев В. Ф. 6623
Кудрявцев П. С. 6319
Кужий А. И. 6580 Д
Куликов Д. К. 6982
Куратовский К. 6481
Курцвейль Я. 6574, 6575
Кухта Г. П. 6848
Кучеренко Э. Г. 6532

Л

Лабутин Д. Н. 6380, 6632
Лашкарьов В. Є. 6297
Лебедев В. И. 6851
Левин В. И. 6307 К
Литвер Е. Л. 6435
Літвінов М. В. 6871
Ло Хэ 6875
Лукомский Я. И. 6741

М

Максимов Ю. Д. 6529
Мандельбройт С. 6553 К
Маневич Д. В. 6631
Манзон Б. А. 6305
Маркус А. С. 6686, 6687
Марченко В. А. 6569
Матвеенко А. А. 6898
Микеладзе Ш. Е. 6557
Мительман Л. М. 6617
Михаилович Д. 6608
Мышкис А. Д. 6323

Н

Никольский С. И. 6984
Никулин Н. А. 6903
Новоселов С. И. 6367 К
Носиро 6536

О

Обрешков Н. 6360 К, 6366 К, 6671
Остиану Н. М. 6828 Д

П

Павлюк И. А. 6559
Парасюк О. С. 6714, 6715, 6716
Пейве Я. В. 6298
Петренко А. И. 6784
Петров В. В. 6721
Петровский И. Г. 6590
Петропавловская Р. В. 6558
Пикус Д. Л. 6498
Писарева Н. М. 6812
Пламеннов И. Я. 6502
Плись А. 6524
Погодичева Н. А. 6516 Д
Полищук Е. М. 6694, 6695
Положій Г. М. 6616
Полозков А. П. 6307 К
Постников А. Г. 6341

Р

Рабинович И. М. 6323
Расёва Г. 6331
Рахматуллина Л. Ф. 6622
Романовский В. И. 6753
Русишвили О. С. 6789 Д
Рутман М. А. 6693, 6697
Рыбников К. А. 6324

С

Саргсян И. С. 6565
Свидзинский А. В. 6718 Д
Свирский И. В. 6612
Селиванова С. Г. 6514
Семендяев К. А. 6680 К
Семенцов-Огиевский М. А. 6786 К
Сикорский Р. 6331
Сильде О. М. 6772 Д
Симония В. Т. 6475 Д
Синюков Н. С. 6826 Д
Скорняков Л. А. 6834
Смирнов С. А. 6783
Смирнов С. В. 6900
Соболев Н. А. 6307 К
Соколик Г. А. 6713
Соколов Н. П. 6383
Соловьев Р. Н. 6997 К
Слободецкий Л. Н. 6599
Старжинский В. М. 6307К
Стечкин С. Б. 6512
Стоянов Ст. М. 6906
Сунчелеев Р. Я. 6615
Сюй Чунь-фан 6320

Т

Титц Т. 6661
Тонков Л. В. 6376
Топчиев А. В. 6300

У

Уразбаев Б. М. 6346

Ф

Файнберг М. М. 6307 К
Феденко А. З. 6827 Д
Фильчаков П. Ф. 6531
Фукс Б. А. 6307 К
Фукс Л. 6406

Х

Халилов З. И. 6689
Хион Я. В. 6457
Хирано 6312 К
Хованский Г. С. 6895
Хоменко П. Г. 6996 К
Хромой Я. В. 6314 Д
Хуа Ло-гэн 6542

Ц

Цыпкин Я. З. 6561

Ч

Чайковский Я. 6661
Черников С. Н. 6382
Черский Ю. И. 6624
Чистяков В. Д. 6327
Чуб А. Т. 6774 Д
Чудов Л. А. 6590
Ћетковић С. 6636

Ш

Шагинян А. Л. 6519
Шапиро В. Я. 6307 К
Шатунов М. П. 6593
Шафаревич И. Р. 6397 К
Шахно К. У. 6310 К
Шварц А. С. 6480
Шестаков А. А. 6307 К
Широких И. И. 6998 К
Шмульян Ю. Л. 6683, 6684
Шнейдмюллер В. П. 6451
Шостак Р. Я. 6633
Шубников А. В. 6303
Шульгин М. Ф. 6555

Щ

Щеглов М. П. 6652
Щелкачев В. Н. 6613

Ю

Югова Г. А. 6626 Д
Юсупов Д. 6787 Д

Я

Яглом И. М. 6304
Якубович В. А. 6576

A

Addad M. 6927
Ahmed F. R. 6922
Albrecht R. 6644 К
André J. 6410, 6832
Angelo E. J., Jr 6975
Aoki K. 6484
Aruffo G. 6501
Aubert K. E. 6449
Aumann G. 6504
Auslander L. 6816

B

Babuška I. 6605 К
Backes F. 6808
Badea M. 6814
Baer R. 6413, 6414
Bal L. 6901
Baldwin C. J., Jr 6936
Banachiewicz T. 6873
Barnard G. A. 6750
Barner M. 6803
Barnes E. S. 6342
Bastien H. 6316
Bauer F. L. 6887
Bauer H. 6696
Baxter G. 6719
Beatty S. 6836
Becker H. 6545
Bell J. 7021 П
Bellman R. 6564, 6742, 6743, 6744, 6746
Bendiner R. 6990
Berencz F. 6881
Berni A. 6894
Bettridge B. R. 6995 К
Beyer G. 6433
Bilimovitch A. 6520
Bini U. 6377
Bîtea I. 6643 К
Blair R. L. 6453
Blanch G. 6888, 6889
Block D. 6355
Boczeck J. 6790 Д
Boerner H. 6428 К
Boesch W. 6983
Boldt I. V. 6923
Booth A. D. 6882
Borel A. 6487
Borel E. 6730 К
Bottema O. 6777
Botts T. 6462
Boughon P. 6792
Bown J. 6964, 6965
Boyer C. B. 6776
Bracewell R. N. 6669
Brachman M. K. 6638
Braumann P. 6370
Brelot M. 6591
Brenner J. L. 6384
Bricard R. 6770
Brouwer L. E. J. 6329
Brown A. 6699
Brown R. H. 7030
Browne M. L. 6488
Bruck R. H. 6456
Bruhat F. 6416
Bruscaglioni R. 6985
Buchholz H. 6664 К
Buckingham J. 7021 П
Burkhart W. H. 7016 П
Büttner S. 6907

C

Cafiero F. 6500
Cagnac G. 6645 К
Carlitz L. 6349, 6350, 6375, 6386
Carlson C. H. 7018 П
Cartan H. 6427
Castro Brzezicki A. de 6629
Chambers L. G. 6630
Charles B. 6470 К
Chehata C. G. 6415
Chern Shiing-Shen 6810
Chéron A. 6730 К
Cherry C. 6752
Chevalley C. 6487
Chevrier J. L. P. 6364
Chisini O. 6794, 6795
Chow Wei-l. 6822
Cicala P. 6938
Cinquini S. 6647 К
Cinquini Cibrario M. 6647 К
Clunie J. 6533
Commissaire H. 6645 К
Cooke J. C. 6625
Corduneanu C. 6586
Cotte M. 6677
Couffignal L. 6867
Couffignal P. L. 7004 П
Cox D. R. 6749
Craig E. J. 6866
Cramér C. H. 6731 К
Croisot R. 6421, 6472 К
Cruickshank D. W. J. 6922
Cypser R. J. 7031

D

Dallmann H. 6765
Danese A. E. 6660
David H. A. 6734
Davidson H. R. 7036 П
Davis D. S. 6891
Davis D. T. 7006 П
Davis L. 6933
Delachet A. 6365 К
Demidovici B. P. 6589
Denis-Papin M. 6646 К
Denjoy A. 6549
Denke P. H. 6923
Diaz J. B. 6583
Dijksterhuis E. J. 6326
Dillard J. K. 6936
Ditkin V. A. 6672 К
Dowling R. L., Jr 7037 П
Dubreil-Jacotin M. L. 6472 К
Ducrocq A. 6987
Duparc H. J. A. 6387, 6392
Dwyer P. S. 6868

E

Earnshaw J. B. 6946
Edrei A. 6537
Egerváry E. 6389
Eilenberg S. 6427
Epstein B. 6738
Erdös P. 6442
Espe I. 6844
Evans A. 6343

F

Fehr H. F. 6369 К
Feinstein A. 6747
Fekete M. 6522, 6523
Feys R. 6337
Fisz M. 6722
Fleishman B. A. 6587
Foody J. J. 6932
Fortet R. 6385
Fowweather F. 6921
Fraïssé R. 6336
Frajese A. 6315
Freedman A. L. 6925
Frieberg N. R. 7018 П
Friedlander F. G. 6592
Fröhlich A. 6432
Fuchs L. 6452
Fujiwara T. 6464

G

Gale E. I. 6778
Gallup F. H. 7001 П
Ganea T. 6489
Gaschütz W. 6409
Gautschi W. 6842
Geri G. 6869
Geronimus Ya. L. 6518
Ghezzo S. 6793
Gilbert W. M. 6723
Gillman L. 6442
Gilmore P. C. 6440
Givens W. 6861
Gjellestad G. 6657
Goddard L. S. 6391
Godeaux L. 6581
Gómez Garcia J. A. 6860
Gomory R. E. 6572
Gonzalez Dominguez A. 6675
Goodey W. J. 6865
Goormaghtigh R. 6764
Grabbe E. M. 6915
Grauert H. 6543
Gray H. J., Jr 6846
Greenspan D. 6870
Griffith J. L. 6667
Grotemeyer K.-P. 6838
Guérindon J. 6446, 6447
Gupta H. 6351

H

Haantjes J. 6809 К
Haas F. 6572
Hadwiger H. 6829
Hahn W. 6379
Haimo F. 6407
Hájek O. 6639
Halanay A. 6571
Hamilton J. C. 7037 П
Hanley L. D. 6980
Hannan E. J. 6736
Harmuth H. 6855
Hartley H. O. 6734
Hartman Ph. 6560, 6563, 6567
Havel V. 6465, 6833
Hayes W. D. 6653
Hedlund G. A. 6490
Heinz E. 6585
Hély J. 6825
Henriksen M. 6442
Hermes H. 6471 К
Herz C. S. 6656
Hestenes M. R. 6863
Heydenburg N. P. 7034
Higman G. 6454
Hintikka K. J. 6466
Hiramatu H. 6820

Hirokawa H. 6508
Hirschman I. I. 6513
Hirzebruch F. 6491 К
Hladik A. 6618
Hochmuth H. 6644 К
Hodges J. H. 6348, 6349
Hogben L. 6729 К
Homma T. 6478
Hopf H. 6548
Howson A. G. 6467
Humal A. 6899
Huppert B. 6399
Huszár G. 6374
Hyman M. A. 6911 Д

I

Inoue M. 6856
Ionescu D. V. 6877
Ionescu Tulcea C. T. 6704
Irvine N. L. 6933
Iséki K. 6455, 6476
Ishihara S. 6813
Itô N. 6412
Izbicki H. 6430 Д
Izumi Shin-ichi 6509

J

Jacchia J. 6883
Jacobson N. 6436
Jain M. K. 6670
Janet M. 6603 К
Jankovič Z. 6659
Jaroch O. 6662
Jenkins G. M. 6739
Johnson R. B. 7020 П
Jonas H. 6800
Jones D. S. 6611
Jonsson B. 6461
Jurgens H. A. 7020 П

K

Kalitzin G. St. 6507
Kantz G. 6441
Kasch Fr. 6437
Keller J. B. 6592
Kelley J. L. 6492 К
Kimura N. 6420, 6424
King G. W. 6969
King W. F. 6874
Kinoshita Sh. 6478
Kinukawa M. 6509, 6510, 6511
Kizawa M. 6904
Klamkin M. S. 6354
Klapka J. 6801
Kobayashi T. 6880
Kochendörfer R. 6443
Kodaira K. 6823
Kogo K. 6737
König H. 6709
Korevaar J. 6707, 6708
Koschmann A. H. 6727
Kosinski A. 6483
Kotzig A. 6642 К
Kowalsky H.-J. 6463
Kron G. 6872
Kubo T. 6530
Kuhl R. 6956
Kuhnel A. H. 7024
Kuniyoshi H. 6439
Künzi H. P. 6538
Kuratowski K. 6481
Kurepa G. 6482 6505
Kurita M. 6811
Kuznêcov P. I. 6672 К

L

Lagrange R. 6802
Lair J. J. B. 7011 П
Lal G. 6450
Lambek J. 6359
Langham E. M. 7021 П
Larsen O. F. 7018 П
Lauffer R. 6876
Lauwerier H. A. 6601
Legrand J. 6358
Lenz H. 6780
Lesieur L. 6468, 6472 К
Lietzmann W. 6362 К
Liggett I. C. 6924
Lluis E. 6824
Lo A. W. 6966
Lorch E. R. 6698
Lowan A. N. 6640

M

Maass H. 6544
Macdonald N. 6979
McFadden J. A. 6733
McGuigan J. H. 7003 П
Maehara S. 6333
Malliavin P. 6535
Mandel J. 6673
Mandel P. 7012 П
Marcus S. 6499
Marinescu G. 6712
Markwald W. 6332
Marshall A. H. 6954
Martin A. I. 6595
Masing W. 6957
Masters J. I. 6674
Masuda K. 6434
Matsushita S. 6703
Maurer I. 6408
Meill H. J. 6655 Д
Meixner J. 6663 К
Menon P. K. 6345
Methée P.-D. 6710, 6711
Miller F. H. 6679 К
Millington G. 6884
Minakshisundaram S. 6598
Misonou Y. 6700
Mitchell A. R. 6892
Mitrović D. 6378
Mludek H. 6908
Moisil Gr. C. 6604 К 6610
Molnár J. 6835
Moneagle O. F. 7020 П
Montes Villalón J. 6927
Moody E. A. 6338
Moody N. F. 7009 П
Morgenstern D. 6726
Morin U. 6368 К
Morley D. W. 7026
Morris H. N. 6913
Moser L. 6359
Moshman J. 6893
Mostowski A. 6334
Müller C. 6621
Müller P. F. 6791 Д
Muracchini L. 6807
Murphy O. J. 7003 П
Murray D. B. 6970
Myrberg L. J. 6541

N

Nagata M. 6444
Sz.-Nagy B. 6717 К
Nakamura M. 6701
Nakayama T. 6444
Nash J. 6818
Neculcea M. 6781
Nehari Z. 6528
Neumann J. von 6886
Newby N. D. 7003 П
Nicolau E. 6934
Nikodým O. M. 6494, 6495, 6496
Ninomiya N. 6497
Nishimura T. 6854
Nitsche J. 6841
Nobusawa N. 6438
Noether G. E. 6735
Novotný M. 6390

O

Obata M. 6813
Ogawa J. 6737
Oğuztöreli M. N. 6539
Osborne J. M. 6981
Osima M. 6448
Ostrowski A. M. 6388, 6395, 6766, 6767
Overhoff G. 6976

P

Pachares J. 6720
Packer J. S. 6937
Palamà G. 6356
Papp D. 6755, 6758
Papy G. 6815
Pavel M. 6682
Pearson E. S. 6734
Peremans W. 6387, 6392
Péter R. 6330
Petrovszkij I. G. 6602 К
Phan-Van-Loc 6620
Philippe J. 6754
Piccard S. 6402
Pickert G. 6396 К, 6459
Pihl M. 6775
Pini B. 6594, 6600
Pinl M. 6756
Pipping N. 6344
Pirko Z. 6662
Pliś A. 6524
Pollard J. R. 7033
Pólya G. 6840
Popov B. S. 6650
Popoviciu T. 6879
Pressey D. C. 6945
Primrose E. J. 6798 К
Pták V. 6857
Pucci C. 6628

Q

Queysanne M. 6365 К

R

Rado F. 6901
Rajchman J. A. 6966
Rasiowa H. 6331, 6334, 6335
Raymond F. H. 6988
Reddick H. W. 6679 К
Ree R. 6460
Rektorys K. 6605 К
Rhees R. 6318
Ricci G. 6517, 6649
Richards R. K. 6993 К
Riorden J. F. 6931
Roberts R. B. 7034
Robinson A. 6440
Rooney P. G. 6702
Romano F. 6763
Rough M., Jr 6352
Rubinoff M. 6912
Rufener E. 6648 К
Rühs F. 6665
Rutherford D. E. 6892
Rutishauser H. 6862
Ryser H. J. 6393

S

Saban G. 6839
Sade A. 6357
Saks S. 6552 К
Samarskij A. A. 6606 К
Sarton G. 6321
Sauer R. 6804
Sauvage A. 6918
Schenkman E. 6411, 6458
Scherberg M. G. 6931
Schmidt W. 6363 Д
Schneider P. J. 6858, 6859
Schouten J. A. 6819
Schreiber S. 6681
Schwarz E. 6910
Seidel J. 6830, 6831
Sekino K. 6404
Severi F. 6796
Shen D. W. C. 6937
Shiskin J. 6948
Siegel K. M. 6658
Sik F. 6426
Sikorski R. 6331
Sim A. C. 6884
Singh V. 6666
Skan S. W. 7000 К
Skavlem S. 6844
Smirnov V. I. 6641 К
Smith F. B. 6930
Spenser G. 6963, 6964
Spetner L. M. 6751
Speziali P. 6322
Sprott D. A. 6740
Steck M. 6317
Stellmacher K. L. 6584
Stöhr A. 6769
Stoll W. 6546, 6547
Stone A. H. 6454
Strickler W. B. 7007 П
Strong J. D. 6944
Stufflebeam G. T. 6951
Subba Rao K. 6353
Sumner D. B. 6668
Sundstrand O. J. 7017 П
Surányi J. 6373
Suzuki H. 6485
Sydler J.-P. 6760
Szegö G. 6634

T

Taam-Choy-Tak 6527
Takács L. 6372, 6748
Tamura T. 6425
Taunt D. R. 6401
Taylor F. J. 7032
Taylor J. C. 7029

Terada F. 6445
Thébault V. 6761, 6762
Thierrin G. 6422, 6423
Thornton C. G. 6980
Thurston H. 6361 K
Tichonov A. N. 6606 K
Titchmarsh E. C. 6566, 6595
Tornheim L. 6347
Truxal J. G. 6727
Tsuboi T. 6398
Tuckerman B. 6886
Tugué T. 6506
Turán P. 6371
Tuzuku T. 6444

U

Vajda S. 6745
Veltkamp G. W. 6392
Vetter Q. 6325
Vilcovici V. 6582
Vogelaere R. de 6845
Vyčichlo F. 6605 K

W

Waelbroeck L. 6418
Wagner H. 6635
Wald A. 6728 K
Wall E. 6939
Walter J. H. 6417
Wang Shou-Jen 6732
Warmus M. 6905
Washizu K. 6864
Wray D. 6989
Wrench J. W., Jr 6890
Wunderlich W. 6768
Woods-Hill W. 6991, 7006 II
Wasow W. 6843
Wass C. A. A. 6994 K
Wędzinski E. 6885
Wever F. 6400
Whitehead G. W. 6486
Wielandt H. 6394
Williamson D. T. N. 7025
Wintner A. 6556, 6560, 6563
Wise M. E. 6637
Wolf P. 6403
Woodler J.-H. 6339

Y

Yano K. 6819, 6820, 6821
Young L. C. 6503, 6627

Z

Zaring W. M. 6651
Zaubek O. 6479
Zemanian A. H. 6676
Zlámal M. 6570
Zobel A. 6797
Zygmund A. 6552 K

伊藤清三 6692
能代清 6536
吉田洋一 6308
平野智治 6312

彼得洛夫斯基 6590
木澤誠 6904
朱多夫 6590
清宮俊雄 6311

王守表 6381
王壽仁 6732
石川榮助 6878
羅河 6875

華羅庚 6542
董光昌 6340
許蘅舫 6320
谷超豪 6817